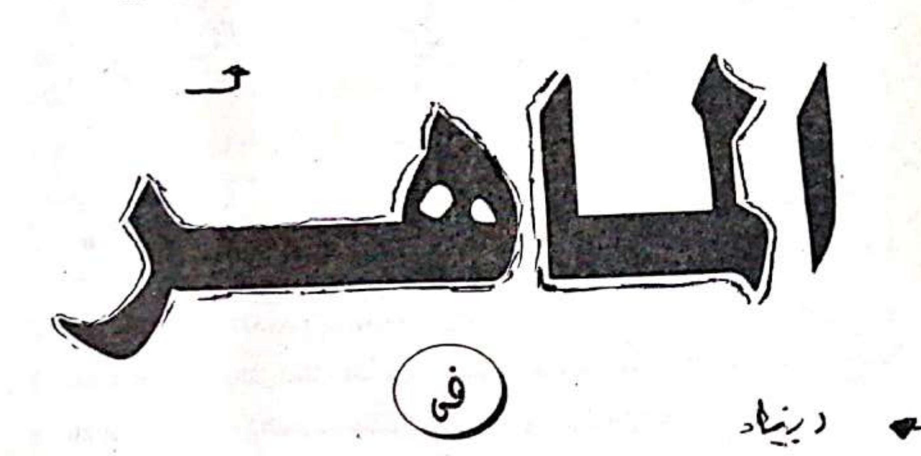


في

الرياضيات

للصف الثانى الإعدادى

الفصل الدراسى الأول

يطلب من : **مكتبة النجاح ـ مؤسسة الكتب الذهبية / بالفجالة**

الدعم الفنى ☎ ٠٢/٢٣٩٥٠٠١٣ ـ ٠١١١٣٩٥٠٠١٣

وللاقتراحات ☎ ٢٣٩٥٠٠١٣ / ٠١٠٠١٥٠٨٠٠٥ ص.ب: ١٢ الدواوين – القاهرة

أو على موقعنا

WWW.ELMAHER.org



بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

الحمد لله الذى وفقنى وأعاننى وأنار لى الطريق كى أستطيع أن أنجز هذا الكتاب بصورته هذه لأقدمه إلى أبنائى الطلاب وإلى زملائى أساتذة الرياضيات آملا أن يجدوا فيه العون على أداء رسالتهم بكل ثقة ونجاح. وأسأل الله العلى القدير أن يحوز هذا الكتاب على تقديركم وثقتكم التى اعتز بها. فقد روعى أن يتضمن الكتاب الاهتمامات المتنوعة للقاعدة العريضة من الطلاب والمعلمين وأولياء الأمور وذلك من خلال:

- عرض المادة بطريقة مبسطة وشيقة.
- أمثله توضيحيه لأهم ما يجب التعرف عليه والتى تشمل الأفكار المختلفة لجميع أجزاء المنهج
- أمثله للتدريب نصف محلوله ليتدرب الطالب على كيفية الحل.
- التمارين الوفيرة والمتدرجة التى تناسب كل المستويات مشتملة على افكار كتاب الوزارة

.. وقد تم تقسيمها إلى ثلاثة أجزاء:

أولا: راجع معنا واختبر نفسك وهى ما ننفرد به ليجعل الطالب فى مراجعة مستمرة فى صورة اختبار مع كل درس جديد

ثانيا: اجب عما يأتى وهى التمارين المتدرجة وهى مستويات ثلاثة مختلفة

مسائل المستوى الأول- وتعتبر أسئلة تمهيدية ومباشرة لفهم الدرس.

مسائل المستوى الثانى - وهى مسائل الامتحانات وما فى مستواها وهى فى مستوى الطالب المتوسط وفوق المتوسط. مع أفكار مختلفة يجب أن يلم بها الطالب.

أسئلة الطلاب المتفوقين وهى لتنمية التفكير والابداع لدى الطلاب

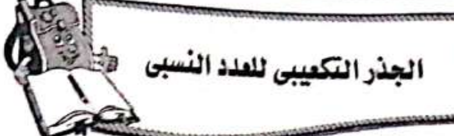
- امتحانات وفيرة ليتدرب الطلاب على حلها.

أسأل الله العون والتوفيق

المؤلف

فهرس





الجذر التكعيبى للعدد النسبى

سبق أن تعلمنا أن حجم المكعب = طول الحرف × نفسه × نفسه وحدة مكعبة

أى أن حجم مكعب طول حرفه ٥ سم = ٥ × ٥ × ٥ = ١٢٥ سم^{٣}

و العكس إذا كان لدينا مكعب حجمه ٢٧ سم^{٣} و نريد معرفة طول حرفه فكيف توجده ؟

بالطبع لايجاد ذلك فإننا نبحث عن عدد س بحيث س × س × س يساوى ٢٧

و لايجاد هذا العدد نحلل ٢٧ إلى عوامله الأولية كما بالشكل

٢٧	٣
٩	٣
٣	٣
١	

أى أن ٣ × ٣ × ٣ = ٢٧

∴ المكعب الذى حجمه ٢٧ سم^{٣} يكون طول حرفه ٣ سم

نلاحظ أن " العدد الذى نضربه فى نفسه فى نفسه ليكون الناتج ٢٧ هو ٣ "

و يمكن الاستغناء عن هذه الجمله بعبارة أخرى رياضية و هى " الجذرالتكعيبى للعدد ٢٧ هو ٣ "

و تكتب رياضياً $\sqrt[٣]{٢٧} = ٣$ و من ذلك يمكن تعريف الجذر التكعيبى لعدد نسبى كما يلى :

تعريف

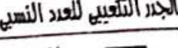
الجذر التكعيبى للعدد النسبى أ هو العدد الذى مكعبه يساوى أ
و يرمز للجذر التكعيبى للعدد النسبى أ بالرمز $\sqrt[٣]{\text{أ}}$

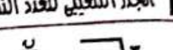
و على ذلك فإن $\sqrt[٣]{٢٧} = ٣$ لأن $(٣)^{٣} = ٢٧$

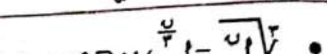
$\sqrt[٣]{-٨} = -٢$ لأن $(-٢)^{٣} = -٨$

ملاحظات

- الجذر التكعيبى للعدد أ يكون موجباً إذا كان أ عدد موجب و يكون الجذر التكعيبى للعدد أ سالباً إذا كان أ عدد سالب أى أن الجذر التكعيبى لأى عدد يكون له نفس إشارة هذا العدد
- $\sqrt[٣]{\text{صفر}}$ = صفر ، $\sqrt[٣]{١} = ١$ ، $\sqrt[٣]{-١} = -١$
- $\sqrt[٣]{\text{أ}^{٣}} = \text{أ}$ فمثلاً $\sqrt[٣]{٥^{٣}} = ٥$ ، $\sqrt[٣]{(-٢)^{٣}} = -٢$









- $\sqrt[٣]{\text{أ}^{\text{ن}}} = \text{أ}^{\frac{\text{ن}}{٣}}$ ، ن ∈ ص+ فمثلاً $\sqrt[٣]{\text{أ}^{٦}} = \text{أ}^{\frac{٦}{٣}} = \text{أ}^{٢}$ لأن $\sqrt[٣]{\text{أ}^{٦}} = \sqrt[٣]{\text{أ}^{٣} \times \text{أ}^{٣}} = \text{أ} \times \text{أ} = \text{أ}^{٢}$
- العدد النسبى له جذر تكعيبى واحد و هو عدد نسبى أيضاً
- لايجاد الجذر التكعيبى للعدد النسبى المكعب الكامل :
  ① يمكن تحليل العدد إلى عوامله الأولية
  ② يمكن استخدام الآلة الحاسبة

أمثلة توضيحية

مثال ١ استخدم التحليل لايجاد قيمة ما يأتى مع التحقق من صحة الاجابة باستخدام الآلة الحاسبة :

① $\sqrt[٣]{٦٤}$ ② $\sqrt[٣]{-٠,٢١٦}$ ③ $\sqrt[٣]{١٥\frac{٥}{٨}}$

الحل

نحلل كل عدد إلى عوامله الأولية

①

٦٤	٢
٣٢	٢
١٦	٢
٨	٢
٤	٢
٢	٢
١	

(٢ × ٢ = ٤)

$\therefore \sqrt[٣]{٦٤} = ٢ \times ٢ = ٤$

② $٠,٢١٦ = \frac{٢١٦}{١٠٠٠}$

٢١٦	٢
١٠٨	٢
٥٤	٢
٢٧	٣
٩	٣
٣	٣
١	

(٢ × ٣ = ٦)

$\therefore \sqrt[٣]{-٠,٢١٦} = \sqrt[٣]{\frac{-٢١٦}{١٠٠٠}} = \frac{-٢ \times ٣}{١٠} = \frac{-٦}{١٠} = -٠,٦$

③ $١٥\frac{٥}{٨} = \frac{١٢٥}{٨}$

١٢٥	٥
٢٥	٥
٥	٥
١	

٨	٢
٤	٢
٢	٢
١	

$\therefore \sqrt[٣]{١٥\frac{٥}{٨}} = \sqrt[٣]{\frac{١٢٥}{٨}} = \frac{٥}{٢}$

و يمكن التحقق من صحة الناتج باستخدام الآلة الحاسبة كما يلى :

shift ∛ 6 4 = 4

و بنفس الطريقة يمكن التأكد من كل النتائج



مثال ٢ أوجد ناتج ما يأتي :

① $\sqrt{٢٥} - \sqrt[3]{٢٧}$ ② $\sqrt{٩} \times \sqrt[3]{-٨}$ ③ $\frac{\sqrt[3]{٦٤}}{\sqrt{٤}}$

الحل

① $\sqrt{٢٥} - \sqrt[3]{٢٧} = ٥ - ٣ = ٢$

② $\sqrt{٩} \times \sqrt[3]{-٨} = ٣ \times -٢ = -٦$

③ $\frac{\sqrt[3]{٦٤}}{\sqrt{٤}} = \frac{٤}{٢} = ٢$

مثال ٣ أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية في ن :

① $س^٣ = ٦٤$ ② $س^٣ + ٧ = ٦$

الحل

① $\because س^٣ = ٦٤$ $\therefore س = \sqrt[3]{٦٤} = ٤$ $\therefore م.ح = \{٤\}$

② $\because س^٣ + ٧ = ٦$ $\therefore س^٣ = ٦ - ٧$

$\therefore س^٣ = -١$ $\therefore س = \sqrt[3]{-١} = -١$ $\therefore م.ح = \{-١\}$

مثال ٤ أوجد مجموعة الحل في ص للمعادلات الآتية :

① $٢س^٣ + ٣ = ٥٧$ ② $\frac{١}{٥}س^٣ - ٤ = ٢١$

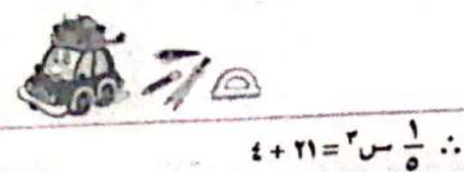
> ملاحظة
> لحل المعادلة لابد أن نجعل س بمفردها في الطرف الأيمن وذلك باستخدام المعكوس الجمعي ثم المعكوس الضربي

الحل

① $\because ٢س^٣ + ٣ = ٥٧$ $\therefore ٢س^٣ = ٥٧ - ٣$

$\therefore ٢س^٣ = ٥٤$ $\therefore س^٣ = \frac{٥٤}{٢} = ٢٧$

$\therefore س = \sqrt[3]{٢٧}$ $\therefore س = ٣$ $\therefore م.ح = \{٣\}$



② $\because \frac{١}{٥}س^٣ - ٤ = ٢١$ $\therefore \frac{١}{٥}س^٣ = ٢١ + ٤$

$\therefore \frac{١}{٥}س^٣ = ٢٥$ (بضرب الطرفين × ٥)

$\therefore ٥ \times \frac{١}{٥}س^٣ = ٢٥ \times ٥$ $\therefore س^٣ = ١٢٥$

$\therefore س = \sqrt[3]{١٢٥}$ $\therefore س = ٥$ $\therefore م.ح = \{٥\}$

مثال ٥ أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية في ص :

① $(س + ٣)^٣ = -٨$ ② $(٢س - ١)^٣ - ١٥ = ١٢$

الحل

① $\because (س + ٣)^٣ = -٨$ باخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$\therefore \sqrt[3]{(س + ٣)^٣} = \sqrt[3]{-٨}$ $\therefore س + ٣ = -٢$

$\therefore س = -٢ - ٣$ $\therefore س = -٥$ $\therefore م.ح = \{-٥\}$

② $\because (٢س - ١)^٣ - ١٥ = ١٢$ $\therefore (٢س - ١)^٣ = ١٢ + ١٥$

$\therefore (٢س - ١)^٣ = ٢٧$ باخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$\therefore \sqrt[3]{(٢س - ١)^٣} = \sqrt[3]{٢٧}$ $\therefore ٢س - ١ = ٣$

$\therefore ٢س = ٣ + ١$ $\therefore ٢س = ٤$ $\therefore س = ٢$ $\therefore م.ح = \{٢\}$

مثال ٦ أوجد طول حرف مكعب حجمه ٢١٦ سم^٣

الحل

نفرض أن طول حرف المكعب = س سم

$\therefore$ حجم المكعب = $س^٣$

$٢١٦ = س^٣$

$\because س^٣ = ٢١٦$ $\therefore س = \sqrt[3]{٢١٦} = ٦$

$\therefore$ طول حرف المكعب = ٦ سم

وسوف ندرس بالتفصيل المكعب والكرة في درس تطبيقات على الجذور



٧ أوجد طول قطر الكرة التى حجمها ١١٣,٠٤ سم³ (π = ٣,١٤)

الحل

∵ حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق³

∴ ١١٣,٠٤ = $\frac{٤}{٣}$ × ٣,١٤ × نق³

∴ ١١٣,٠٤ = $\frac{٣١٤}{٧٥}$ نق³

∴ نق³ = $\frac{٧٥ \times ١١٣,٠٤}{٣١٤}$ = ٢٧

∴ نق = ٣ سم   ∴ طول قطر الكرة = ٦ سم



تدريب (١)

اكمل ما يأتي :

① $\sqrt[3]{٨}$ = ...   ② $\sqrt[3]{-٢٧}$ = ...

③ $\sqrt[3]{\frac{-٨}{١٢٥}}$ = ...   ④ $\sqrt[3]{-٠,٠٦٤}$ = ...



تدريب (٢)

اكمل ما يأتي :

① $\sqrt{٩}$ + $\sqrt[3]{٦٤}$ = ... + ... = ...

② $\sqrt{٤}$ × $\sqrt[3]{٢٧}$ = ... × .... = ...



تدريب (٣)

أكمل لإيجاد مجموعة حل المعادلة ٢ س³ − ٦ = ٤٨ فى ن :

الحل

∵ ٢ س³ − ٦ = ٤٨   ∴ ٢ س³ = ٤٨ + ...

∴ ٢ س³ = ...   (بالقسمة على ....)

∴ $\frac{٢}{.....}$ س³ = ...   ∴ س³ = ...

∴ س = ...   ∴ م.ح = {.....}

تدريب (٤)

أكمل لإيجاد مجموعة حل المعادلة (س + ٢)³ = ٢٧ فى ن :

الحل

∵ (س + ٢)³ = ٢٧   ∴ بأخذ الجذر ....

∴ $\sqrt[3]{(س + ٢)^3}$ = ...   ∴ س + ٢ = ...

∴ س = ...   ∴ س = ...   ∴ م.ح = {.....}

تدريب (٥)

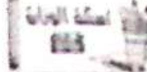
اكمل ما يأتي :

① $\sqrt[3]{٢٧}$ = $\sqrt{.....}$ ② $\sqrt{١٠٠}$ = $\sqrt[3]{.....}$

③ $\sqrt[3]{٢٥ + ...}$ = ٥   ④ $\sqrt[3]{٣\frac{٣}{٨}}$ = ...

⑤ $\sqrt[3]{٢٧ س^{٦} ص^{١٢}}$ = ...   ⑥ $\sqrt[3]{س^{٦}}$ = ...





تمارين (٢) على الجذر التكعيبي للعدد النسبي

أولاً : راجع معنا و اختبر نفسك



عزيزي الطالب :

في هذا المكان من كل تمرين ستجد :

اسئلة لمراجعة ما سبق في صورة اختبار تراكمي على ما سبق دراسته تجيبه في نفس الورقة قبل أن تدخل في الدرس الجديد وهذا يجعلك تتذكر ما درست باستمرار ولا تنساه و يجعلك في مراجعة مستمرة لدروسك السابقة مما يجعلك في تواصل مع ما درست و أيضاً يعودك على الأختبارات و يزيل رهبتها في نفسك وهذه الميزة يقدمها لك كتاب الماهر فقط

ثانياً : أجب عما يأتي :

مسائل المستوى الأول

١ اكمل ما يأتي :

(١) $\sqrt[3]{٨} = \dots\dots\dots$ (٢) $\sqrt[3]{-١٢٥} = \dots\dots\dots$

(٣) $\sqrt[3]{٢٦ + ١} = \dots\dots\dots$ (٤) $\sqrt[3]{٦٤} - ١ = \dots\dots\dots$

(٥) $\sqrt[3]{٨^٣} = \dots\dots\dots$ (٦) $\sqrt[3]{\dots\dots} = -٨$

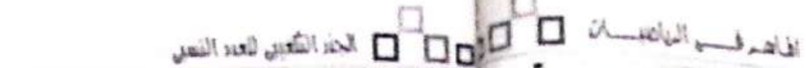
(٧) $\sqrt[3]{\dots\dots} = ٤$ (٨) $\sqrt[3]{٨} + \sqrt[3]{-٨} = \dots\dots\dots$

(٩) $\sqrt[3]{٨} + \sqrt[3]{\frac{١}{٨}} = \dots\dots\dots$ (١٠) $\sqrt[3]{\frac{٢٧}{\dots\dots}} = ٠,٣$

(١١) $\sqrt[3]{١} - ٣ = \sqrt[3]{\dots\dots}$ (١٢) $\sqrt[3]{٢٧} - \sqrt[3]{\dots\dots} = \sqrt[3]{١}$

(١٣) $\sqrt{٩} + \sqrt[3]{-٨} = \dots\dots\dots$ (١٤) $\sqrt[3]{٢٧} - \sqrt[3]{٦٤} = \dots\dots\dots$

(١٥) $|\sqrt[3]{-١٢٥}| = \sqrt{\dots\dots}$ (١٦) $\sqrt[3]{\dots\dots} + \sqrt{٩} = \sqrt{٢٥}$



(١٧) إذا كانت $س^٣ = ٦٤$ فإن $\sqrt{س} = \dots\dots\dots$

(١٨) إذا كانت $س = \sqrt{٣}$ فإن $س^٣ = \dots\dots\dots$

(١٩) إذا كان $-\sqrt{٩} = \sqrt[3]{س}$ فإن $س = \dots\dots\dots$

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :

(١) $\sqrt[3]{-٢٧} = \dots\dots\dots$ [٣ أو -٣ أو $٣\sqrt[3]{٣}$ أو $-٣\sqrt[3]{٣}$]

(٢) $\sqrt[3]{٠,٠٠٨} = \dots\dots\dots$ [-٢ أو -٠,٢ أو ٠,٢ أو ٢]

(٣) $\sqrt[3]{\frac{-٨}{٢٧}} = \dots\dots\dots$ [$-\frac{٢}{٣}$ أو $\frac{٢}{٣}$ أو $\frac{٤}{٣}$ أو $\pm\frac{٤}{٣}$]

(٤) $\sqrt[3]{٦٤} - \sqrt[3]{٨} = \dots\dots\dots$ [٢ أو $\sqrt[3]{٥٦}$ أو ٦ أو ٤]

(٥) $\sqrt[3]{٤٢\frac{٧}{٨}} = \dots\dots\dots$ [$\frac{٧}{٣}$ أو $\frac{٧}{٢}$ أو $\frac{٧}{١٢}$ أو $\frac{٢}{٧}$]

(٦) $\sqrt{٢٥} = \sqrt[3]{\dots}$ [٥ أو ١٥ أو ١٢٥ أو -٥]

(٧) $\dots\dots = \sqrt[3]{٢٧}$ [±٣ أو $\sqrt{٩}$ أو $\sqrt{٨١}$ أو -٣]

(٨) $\sqrt[3]{\left(\frac{١}{٨}\right)^٢} = \dots\dots\dots$ [$\frac{١}{٢}$ أو $\frac{١}{٤}$ أو $\frac{١}{٨}$ أو $\frac{١}{١٦}$]

(٩) $\sqrt[3]{(-٨)^٢} = \dots\dots\dots$ [٢ أو -٢ أو ٤ أو -٤]

(١٠) $\sqrt{٢٥} - \sqrt[3]{-١٢٥} = \dots\dots$ [١٠ أو صفر أو ٥ أو ±٥]

(١١) $\sqrt[3]{١٠٠٠} \times \sqrt[3]{-٠,٠٠٨} = \dots\dots$ [$\frac{١}{٢}$ أو ١٠ أو ٢ أو -٢]

(١٢) $\sqrt[3]{س^٦} = \sqrt{\dots\dots}$ [$س^٣$ أو $س^٢$ أو س أو $س^٤$]

(١٣) $\sqrt{(-٣)^٢} + \sqrt[3]{(-٣)^٣} = \dots\dots$ [-٦ أو ٦ أو صفر أو ٣٦]



⑭ $\sqrt[3]{٣\frac{٣}{٨}} + \sqrt{٠,٢٥} = ...$ [$\frac{٣}{٢}$ أو $\frac{١}{٢}$ أو ٢ أو −٢]

⑮ $\sqrt[3]{-٢٧} + \sqrt{١٢\frac{١}{٤}} + \sqrt[3]{٠,١٢٥} = ...$ [١ أو صفر أو −١ أو $\frac{١١}{٢}$]

⑯ $\sqrt[3]{٣^{٥} + ٣^{٥} + ٣^{٥}} = ...$ [$٣^{١٥}$ أو $٣^{٥}$ أو ٩ أو $٩^{٥}$]

مسائل المستوى الثانى

③ أوجد قيمة كلاً مما يأتى :

① $\sqrt[3]{٦٤}$ ② $-\sqrt[3]{٢١٦}$ ③ $\sqrt[3]{-٧٢٩}$

④ $\sqrt[3]{٥١٢}$ ⑤ $-\sqrt[3]{-٠,٠٦٤}$ ⑥ $\sqrt[3]{١,٣٣١}$

⑦ $\sqrt[3]{\frac{-٦٤}{١٢٥}}$ ⑧ $-\sqrt[3]{\frac{٢٧}{٣٤٣}}$ ⑨ $\sqrt[3]{\frac{٥١٢}{٨٠٠٠}}$

⑩ $\sqrt[3]{٣\frac{٣}{٨}}$ ⑪ $\sqrt{٤} + \sqrt[3]{٨}$ ⑫ $\sqrt{\frac{٩}{٢٥}} + \sqrt[3]{\frac{٢١٦}{١٢٥}}$

④ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية فى ن :

① $س^{٣} = ٨$ {٢} ② $س^{٣} = ٦٤$ {٤}

③ $٨س^{٣} = -١٢٥$ {$\frac{-٥}{٢}$} ④ $س^{٣} + ٢٧ = ٠$ {−٣}

⑤ $س^{٣} + ١ = ٢$ {١} ⑥ $س^{٣} + ٩ = ٨$ {−١}

⑦ $٨س^{٣} + ٧ = ٨$ {$\frac{١}{٢}$} ⑧ $٢س^{٣} + ٤ = ٥٨$ {٣}

⑨ $٨س^{٣} - ١٠ = ١٧$ {$\frac{٣}{٢}$} ⑩ $٨س^{٣} - ١ = ١٢٤$ {$\frac{٥}{٢}$}

⑪ $٢٧س^{٣} + ٨٠ = ١٦$ {$\frac{-٤}{٣}$} ⑫ $٢س^{٣} - ٦ = س^{٣} + ٢$ {٢}



⑤ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية فى ن :

① $\sqrt[3]{س} = ٥$ {١٢٥} ② $\sqrt[3]{س} = -\frac{١}{٢}$ {$\frac{-١}{٨}$}

③ $\sqrt[3]{س} = -\sqrt{٤}$ {−٨} ④ $\sqrt[3]{س} = \sqrt[3]{٠,٠٠١}$ {٠,٠٠١}

⑤ $(س + ١)^{٣} = -٢٧$ {−٤} ⑥ $(س - ٢)^{٣} = ١٢٥$ {٧}

⑦ $(٣س + ١)^{٣} = -٨$ {−١} ⑧ $(١ - س)^{٣} = ٨$ {−١}

⑨ $(٢س - ١)^{٣} - ١٠ = ٥٤$ {$\frac{٥}{٢}$} ⑩ $(٥س - ٢)^{٣} + ١٠ = ١٨$ {$\frac{٤}{٥}$}

⑥ ① أوجد طول حرف مكعب حجمه ١٢٥ $سم^{٣}$ {٥}

② أوجد طول حرف مكعب حجمه $٣\frac{٣}{٨}$ $سم^{٣}$ {$\frac{٣}{٢}$}

③ إذا كان مربع عدد موجب يساوى ٩ فأوجد مكعب هذا العدد {٢٧}

④ أوجد المساحة الجانبية لمكعب حجمه ٢١٦ $سم^{٣}$

(المساحة الجانبية = ٤ $ل^{٢}$ حيث ل طول حرفه) {١٤٤ $سم^{٢}$}

⑤ أوجد طول نصف قطر الكرة التى حجمها ٤٨٥١ $سم^{٣}$ {١٠,٥ سم}

⑥ كرة حجمها $\frac{١٣٧٢}{٨١}\pi$ وحدة مكعبة أوجد طول قطرها

(حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}\pi نق^{٣}$) {$\frac{١٤}{٣}$ سم}

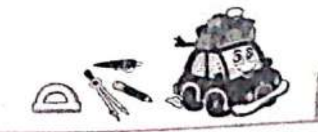
مسائل المتفوقين

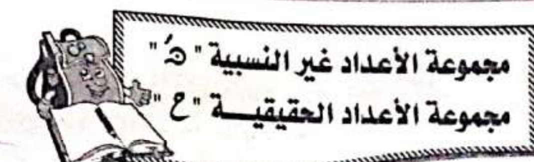
⑦ أوجد فى ن مجموعة حل المعادلة $\frac{س^{٣}}{٤} + \frac{س^{٣}}{٢} = ٦$ {٢}

⑧ أوجد فى ن مجموعة حل المعادلة $\sqrt[3]{\sqrt{س} - ٣} = ١$ {١٦}

⑨ أوجد فى ن مجموعة حل المعادلة $(س^{٢} - ١)^{٣} = ٢٧$ {±٢}

⑩ إناء مكعب الشكل سعته لتر واحد احسب طول حرفه {١٠ سم}





مجموعة الأعداد غير النسبية "ن َ"
مجموعة الأعداد الحقيقية "ح"

علمنا فيما سبق أن العدد النسبى هو العدد الذى يمكن وضعه فى صورة $\frac{أ}{ب}$:

أ ، ب ∈ ص ، ب ≠ ٠ (أى فى صورة $\frac{بسط}{مقام}$) مثل ٢ ، -٣ ، ٣ ، ٩ ، $\frac{٢}{٣}$ ، ٢$\frac{١}{٥}$

و مثل الجذر التربيعى للعدد النسبى المربع الكامل مثل $\sqrt{٤}$ ، $\sqrt{٩}$ ، $-\sqrt{١٦}$

و مثل الجذر التكعيبى للعدد النسبى المكعب الكامل مثل $\sqrt[3]{١}$ ، $\sqrt[3]{٨}$ ، $\sqrt[3]{٢٧}$

و لكن يوجد كثير من الأعداد لا يمكن وضعها على صورة $\frac{أ}{ب}$ مثل $\sqrt{٢}$

لأنه لا يوجد عدد نسبى مربعه يساوى ٢ و على ذلك فإن :

العدد غير النسبى

العدد غير النسبى " ن َ" هو العدد الذى لا يمكن وضعه على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب ∈ ص ، ب ≠ ٠

و من أمثلة الأعداد غير النسبية :

① الجذور التربيعية للأعداد الموجبة التى ليست مربعات كاملة

مثل : $\sqrt{٣}$ ، $-\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٠,٦}$ ، $\sqrt{\frac{٣}{٨}}$

② الجذور التكعيبية للأعداد التى ليست مكعبات كاملة

مثل : $\sqrt[3]{٤}$ ، $-\sqrt[3]{٦}$ ، $\sqrt[3]{-٩}$ ، $\sqrt[3]{\frac{٤}{٧}}$

③ النسبة التقريبية π حيث أنها تساوى $\frac{٢٢}{٧}$ تقريباً (أى أنها قيمة تقريبية)

و هذه الأعداد جميعها لا يمكن ايجاد قيمة مضبوطة لها



ملاحظات

- الأعداد غير النسبية يرمز لها بالرمز ن َ
- مجموعة الأعداد النسبية ن وغير النسبية ن َ مجموعتان منفصلتان أى أن ن ∩ ن َ = ∅
- أى عدد غير نسبى تنحصر قيمته بين عددين نسبيين
- كل عدد نسبى تمثله نقطة وحيدة على خط الأعداد ولكن كل نقطة على خط الأعداد لا تمثل عدداً نسبياً حيث يوجد نقط أخرى تمثل أعداداً غير نسبية
- يمكن تمثيل أى عدد غير نسبى على الصورة $\sqrt{س}$ على خط الأعداد حيث س ∈ ص+
- العدد غير النسبى يُمثل بعدد عشرى غير منته

تمثيل العدد غير النسبى على خط الأعداد

لتمثيل العدد غير النسبى $\sqrt{أ}$ على خط الأعداد

نوجد العددين $\frac{أ+١}{٢}$ ، $\frac{أ-١}{٢}$

ب ، $\frac{أ+١}{٢}$ ، $\frac{أ-١}{٢}$ ، و ، جـ

نعين نقطة ب على عمود مرسوم من نقطة الأصل و بحيث و ب = $\frac{أ-١}{٢}$ وحدة طول

نركز بسن الفرجار فى نقطة ب و بفتحة طولها = $\frac{أ+١}{٢}$ وحدة طول

نرسم قوساً يقطع خط الأعداد فى نقطة و لتكن جـ

فتكون هى النقطة التى تمثل العدد $\sqrt{أ}$ على خط الأعداد

مجموعة الأعداد الحقيقية " ح "

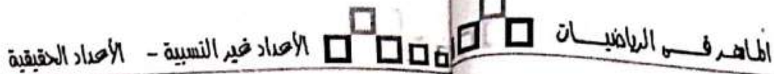
مجموعة الأعداد الحقيقية تتكون من اتحاد المجموعتين ن ، ن َ و يرمز لها بالرمز ح

أى أن ح = ن ∪ ن َ

ح
مجموعة الأعداد النسبية ن
مجموعة الأعداد الصحيحة ص
مجموعة الأعداد الطبيعية ط
مجموعة الأعداد غير النسبية ن َ

ملاحظات

- ط ⊂ ص ⊂ ن ⊂ ح
- كل عدد حقيقى تمثله نقطة وحيدة على خط الأعداد و كل نقطة على خط الأعداد تمثل عدداً حقيقياً وحيداً
- كل عدد نسبى هو عدد حقيقى ولكن ليس كل عدد حقيقى هو عدد نسبى



علاقة الترتيب في ح

- جميع الأعداد الحقيقية التي على يمين الصفر تكون أكبر من الصفر وتكون مجموعة تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة و يرمز لها بالرمز $ح_+$
- جميع الأعداد الحقيقية التي على يسار الصفر تكون أصغر من الصفر وتكون مجموعة تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة و يرمز لها بالرمز $ح_-$

و من ذلك $ح = ح_+ \cup \{٠\} \cup ح_-$ ، $ح_+ \cap ح_- = \phi$

- مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة = $ح_+ \cup \{٠\}$
- مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة = $ح_- \cup \{٠\}$
- $ح_+ \cup ح_- = ح^* = ح - \{٠\}$

أمثلة توضيحية

مثال ١ وضح أي الأعداد الآتية نسبي و أيها غير نسبي :

① $\sqrt{٧}$ ② $\sqrt{١٦}$ ③ $\sqrt[٣]{٨}$

④ $\sqrt[٣]{٩}$ ⑤ صفر ⑥ $\frac{١}{٢}\pi$

الحل

① $\sqrt{٧}$ عدد غير نسبي لأن لا يوجد عدد مربعه يساوي ٧

② $\sqrt{١٦}$ عدد نسبي لأن $\sqrt{١٦} = ٤$

③ $\sqrt[٣]{٨}$ عدد نسبي لأن $\sqrt[٣]{٨} = ٢$

④ $\sqrt[٣]{٩}$ عدد غير نسبي لأن لا يوجد عدد مكعبه يساوي ٩

⑤ صفر عدد نسبي لأن صفر = $\frac{صفر}{١} = \frac{صفر}{٢} = ...$

⑥ $\frac{١}{٢}\pi$ عدد غير نسبي لأن π عدد غير نسبي فيكون $\frac{١}{٢}\pi$ عدد غير نسبي

مثال ٢ أوجد عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما العدد $\sqrt{٢}$

الحل

نبحث عن عددين مربعين كاملين أحدهما أصغر من ٢ و الآخر أكبر من ٢

فنجد أنهما ١ ، ٤ $\therefore ١ < ٢ < ٤$ $\therefore \sqrt{١} < \sqrt{٢} < \sqrt{٤}$

$\therefore ١ < \sqrt{٢} < ٢$ $\therefore \sqrt{٢}$ ينحصر بين ١ ، ٢

حل آخر :

باستخدام الآلة الحاسبة نوجد $\sqrt{٢}$ فنجد أن $\sqrt{٢} \simeq ١,٤١٤٢١٣٥٦٢$

نجد أن $\sqrt{٢} = ١ +$ كسر عشري $\therefore \sqrt{٢}$ ينحصر بين ١ ، ٢

مثال ٣ أوجد عددين نسبيين ينحصر بينهما العدد $\sqrt{٢}$

الحل

بنفس الطريقة السابقة نجد أن $\sqrt{٢}$ ينحصر بين ١ ، ٢ و أن $\sqrt{٢} = ١ +$ كسر عشري

و بالتجريب نجد أن $(١,١)^٢ = ١,٢١$ ، $(١,٢)^٢ = ١,٤٤$ ، $(١,٣)^٢ = ١,٦٩$

$(١,٤)^٢ = ١,٩٦$ ، $(١,٥)^٢ = ٢,٢٥$ ، ....

نلاحظ أن $١,٩٦ < ٢ < ٢,٢٥$ $\therefore ١,٤ < \sqrt{٢} < ١,٥$

أي أن $\sqrt{٢}$ ينحصر بين ١,٤ ، ١,٥

و لإيجاد قيمة تقريبية أدق لرقمين عشريين نأخذ العدد الأصغر ١,٤

و بالتجريب أيضاً $(١,٤١)^٢ = ١,٩٨٨١$ ، $(١,٤٢)^٢ = ٢,٠١٦٤$

$\therefore \sqrt{٢}$ ينحصر بين ١,٤١ ، ١,٤٢ و هكذا

حل آخر :

باستخدام الآلة الحاسبة نوجد $\sqrt{٢}$

$\therefore \sqrt{٢}$ ينحصر بين ١,٤ ، ١,٥ لأقرب رقم عشري

$\therefore \sqrt{٢}$ ينحصر بين ١,٤١ ، ١,٤٢ لأقرب رقمين عشريين

$\therefore \sqrt{٢}$ ينحصر بين ١,٤١٤ ، ١,٤١٥ لأقرب ٣ أرقام عشرية

لاحظ أن
$\sqrt{٢} \simeq ١,٤١٤٢١$
لأقرب رقم عشري
لأقرب رقمين عشريين
لأقرب ٣ أرقام عشرية
نأخذ أرقام عشرية بعد العلامة حسب التقريب المطلوب



مثال ٤ : أوجد لأقرب جزء من عشرة قيمة $\sqrt[3]{٣}$

الحل

نبحث عن عدد مكعب كامل أصغر من ٣ وعدد مكعب كامل أكبر من ٣ فنجد أنهما ١ ، ٨

$\because ١ < ٣ < ٨ \quad \therefore \sqrt[3]{١} < \sqrt[3]{٣} < \sqrt[3]{٨} \quad \therefore ١ < \sqrt[3]{٣} < ٢$

وبالتجريب نجد أن $(١,٤)^٣ = ٢,٧٤٤$ ، $(١,٥)^٣ = ٣,٣٧٥$

$\therefore \sqrt[3]{٣} \simeq ١,٤$

حل آخر :

باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن $\sqrt[3]{٣} \simeq ١,٤٤٢٢٤٩$

$\therefore \sqrt[3]{٣} = ١,٤$ لأقرب جزء من عشرة

$\sqrt[3]{٣} = ١,٤٤$ لأقرب جزء من مائة

$\sqrt[3]{٣} = ١,٤٤٢$ لأقرب جزء من ألف

لأقرب جزء من عشرة
لأقرب جزء من مائة
لأقرب جزء من ألف

مثال ٥ : أثبت أن $\sqrt{١٧}$ ينحصر بين ٤,١٢ ، ٤,١٣

الحل

$\because (٤,١٢)^٢ = ١٦,٩٧٤٤$ ، $(\sqrt{١٧})^٢ = ١٧$ ، $(٤,١٣)^٢ = ١٧,٠٥٦٩$

$\therefore ١٦,٩٧٤٤ < ١٧ < ١٧,٠٥٦٩ \quad \therefore (٤,١٢)^٢ < (\sqrt{١٧})^٢ < (٤,١٣)^٢$

$\therefore ٤,١٢ < \sqrt{١٧} < ٤,١٣ \quad \therefore \sqrt{١٧}$ ينحصر بين ٤,١٢ ، ٤,١٣

حل آخر :

باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن $\sqrt{١٧} \simeq ٤,١٢٣١٠$

ونجد أن قيمة $\sqrt{١٧}$ أكبر من ٤,١٢ وأصغر من ٤,١٣

$\therefore \sqrt{١٧}$ ينحصر بين ٤,١٢ ، ٤,١٣

مثال ٦ : حدد النقطة التي تمثل العدد $\sqrt{٥}$ على خط الأعداد

الحل

لتمثيل $\sqrt{أ}$ فإننا نوجد طول الضلعين اللذين يمثلان الوتر وأحد ضلعي القائمة لمثلث قائم ونرسم هذا المثلث على خط الأعداد حيث $\frac{أ+١}{٢}$ يمثل طول وتر المثلث $\frac{أ-١}{٢}$ ويمثل أحد ضلعي القائمة المرسوم عمودياً على خط الأعداد ونرسم من نقطة و عموداً يصل إلى نقطة ب حيث و ب = $\frac{أ-١}{٢}$ وحدة طول

نركز بسن الفرجار في نقطة ب وبفتحة طولها = $\frac{أ+١}{٢}$ وحدة طول نرسم قوساً يقطع خط الأعداد في نقطة ولتكن هـ فتكون هي النقطة التي تمثل $\sqrt{أ}$ على خط الأعداد

ولتمثيل العدد $\sqrt{٥}$ على خط الأعداد نتبع الخطوات الآتية :

(١) نوجد العددين اللذين يمثلان طول الوتر وطول الضلع وهما $\frac{٥+١}{٢} = ٣$ ، $\frac{٥-١}{٢} = ٢$

(٢) نرسم خط الأعداد ومن نقطة و نقيم عمود طوله = ٢ سم يصل إلى نقطة ب

(٣) نركز بسن الفرجار عند نقطة ب وبفتحة طولها = $\frac{٥+١}{٢} = ٣$ سم نرسم قوساً يقطع خط الأعداد في نقطة نسميها هـ فتكون نقطة هـ هي النقطة التي تمثل العدد $\sqrt{٥}$

ملاحظة

- لتمثيل $-\sqrt{٥}$ على خط الأعداد نتبع نفس الخطوات ولكن نرسم القوس من جهة اليسار





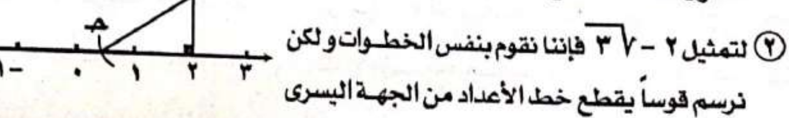
مثال ٧ حدد النقط التى تمثل الأعداد التالية على خط الأعداد :

① $2+\sqrt{3}$ ② $2-\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{3}-1$

الحل

① لتمثيل $2+\sqrt{3}$ فإننا نمثل $\sqrt{3}$ بدءاً من النقطة التى تمثل العدد ٢ وذلك بعد تحديد طول الوتر وطول أحد ضلعى القائمة كما يلى ($\frac{3+1}{2}=2$ ، $\frac{3-1}{2}=1$)

ثم نرسم خط الأعداد ومن النقطة التى تمثل العدد ٢ نقيم عمود طوله = ١ سم يصل إلى نقطة ب نركز سن الفرجار عند نقطة ب وبفتحة طولها ٢ سم نرسم قوساً يقطع خط الأعداد فى النقطة جـ فتكون نقطة جـ هى النقطة التى تمثل $2+\sqrt{3}$



② لتمثيل $2-\sqrt{3}$ فإننا نقوم بنفس الخطوات ولكن نرسم قوساً يقطع خط الأعداد من الجهة اليسرى

③ لتمثيل العدد $\sqrt{3}-1$ يفضل أن نجعله على الصورة $-1+\sqrt{3}$ وبنفس الطريقة نقيم عمود من عند النقطة التى تمثل العدد -1 طوله ١ سم ليصل لنقطة ب نركز بسن الفرجار عند نقطة ب وبفتحة طولها = ٢ سم نرسم قوساً يقطع خط الأعداد فى نقطة جـ فتكون هى النقطة التى تمثل $\sqrt{3}-1$

مثال ٨ حدد النقطة التى تمثل العدد $2\sqrt{7}$ على خط الأعداد

الحل

نمثل $\sqrt{7}$ أولاً على خط الأعداد

∵ $\frac{7+1}{2}=4$ ، $\frac{7-1}{2}=3$

• ∴ نرسم خط الأعداد ومن نقطة و نرسم عمود طوله ٣ سم يصل لنقطة ب



• من نقطة ب نركز سن الفرجار وبفتحة طولها = ٤ سم نرسم قوساً يقطع خط الأعداد فى نقطة جـ وهى النقطة التى تمثل $\sqrt{7}$ نركز بسن الفرجار عند نقطة جـ وبفتحة تساوى و جـ نرسم قوساً يقطع خط الأعداد فى نقطة هـ وهى النقطة التى تمثل $2\sqrt{7}$ (لأن $2\sqrt{7}=\sqrt{7}+\sqrt{7}$)



مثال ٩ أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية حيث س ∈ ه′ :

① $2\text{س}^2=6$ ② $\text{س}^3-5=7$

③ $2\text{س}^2+4=9$ ④ $\frac{2}{3}\text{س}^3-11=7$

الحل

① ∵ $2\text{س}^2=6$ ∴ $\text{س}^2=\frac{6}{2}$ ∴ $\text{س}^2=3$

∴ $\text{س}=\pm\sqrt{3}$ ∴ م.ح = { $\sqrt{3}$ ، $-\sqrt{3}$ }

② ∵ $\text{س}^3-5=7$ ∴ $\text{س}^3=7+5$ ∴ $\text{س}^3=12$

∴ $\text{س}=\sqrt[3]{12}$ ∴ م.ح = { $\sqrt[3]{12}$ }

③ ∵ $2\text{س}^2+4=9$ ∴ $2\text{س}^2=9-4$ ∴ $2\text{س}^2=5$

$\text{س}^2=\frac{5}{2}$ ∴ $\text{س}=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ ∴ م.ح = { $\sqrt{\frac{5}{2}}$ ، $-\sqrt{\frac{5}{2}}$ }

④ ∵ $\frac{2}{3}\text{س}^3-11=7$ ∴ $\frac{2}{3}\text{س}^3=7+11$

∴ $\frac{2}{3}\text{س}^3=18$ بالضرب × $\frac{3}{2}$ (المعكوس الضربى)

∴ $\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\text{س}^3=18\times\frac{3}{2}$ ∴ $\text{س}^3=27$

∴ $\text{س}=\sqrt[3]{27}$ ∴ س = ٣ ، ∵ ٣ ∈ ه ، ٣ ∉ ه′

∴ م.ح = ϕ

أمثلة للتدريب

تدريب (١)

فى الأعداد التالية : ٢ ، $\sqrt{4}$ ، $\sqrt{7}$ ، $\sqrt[3]{8}$ ، $\sqrt[3]{6}$ ، $\sqrt{\text{صفر}}$

تكون الأعداد ...... ، ...... ، ...... ، ...... أعداد نسبية

وتكون الأعداد ...... ، ...... أعداد غير نسبية

تدريب (٢)

أذكر بعض الأمثلة لأعداد نسبية وبعض الأمثلة لأعداد غير نسبية :

أمثلة لأعداد نسبية ....

أمثلة لأعداد غير نسبية ....

تدريب (٣)

أثبت أن $٣,٤ < \sqrt{١٢} < ٣,٥$

✍ الحل

∵ $(٣,٤)^٢ = ...$ ، $(\sqrt{١٢})^٢ = ...$ ، $(٣,٥)^٢ = ...$

∴ $.......... < ١٢ < ....$

∴ $(.....)^٢ < (.....)^٢ < ....$

∴ $.......... < \sqrt{.....} < ....$

تدريب (٤)

حدد النقطة التي تمثل العدد $\sqrt{٣}$ على خط الأعداد

✍ الحل

$\frac{٣ + ...}{٢} = ...$ ، $\frac{.... - ....}{٢} = ...$

-١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥

يمكن أيضاً تمثيل العدد $\sqrt{٣} + ١$ بأن ....

تدريب (٥)

أوجد مجموعة حل المعادلة $٣س^٢ + ٢ = ٤$ حيث س ∈ ن′

✍ الحل

∵ $٣س^٢ + ٢ = ٤$ ∴ $٣س^٢ = ٤ - ....$

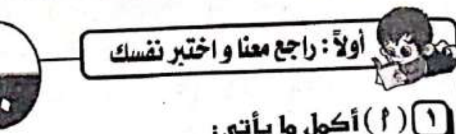
∴ $٣س^٢ = ...$ بالقسمة على ....

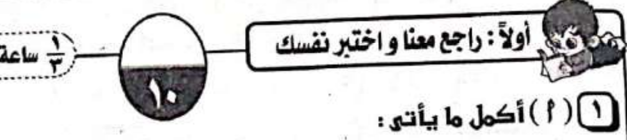
∴ $\frac{٣}{....} س^٢ = \frac{....}{....}$ ∴ $س^٢ = \frac{....}{....}$

∴ $س = \pm ....$ ∴ م.ح = { .... ، .... }





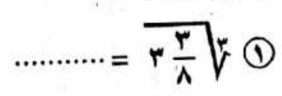




تمارين (٣) على مجموعة الأعداد غير النسبية ن′

أسئلة الوزارة

أولاً : راجع معنا و اختبر نفسك



١٠

$\frac{١}{٣}$ ساعة امتحان ومراجعة

اختبار تراكمي (١)

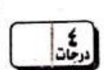
١ (أ) أكمل ما يأتي :

① $\sqrt[٣]{٣\frac{٣}{٨}} = ...$

② $\sqrt{٤} = \sqrt[٣]{......}$

③ $\sqrt[٣]{٠,٠٠١ \times \frac{١}{٨}} = ...$

④ إذا كان $\frac{س}{٢} = \frac{٤}{س^٢}$ فإن س = ...

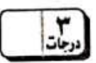


٤ درجات

(ب) أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية حيث س ∈ ن

① $س^٣ + ٢٧ = ٠$

② $(س + ٣)^٣ = ٣٤٣$



٣ درجات

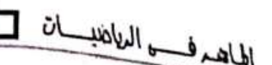
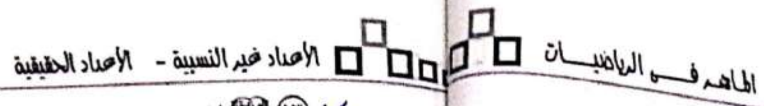
(جـ) أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية حيث س ∈ ن′

① $\frac{٢}{٢٥} س^٢ = \frac{٢}{٥}$

② $٢س^٣ - ٥ = س^٣ + ٣$

٣ درجات



ثانياً : أجب عما يأتى :

مسائل المستوى الأول

(٢) أكمل ما يأتى باستخدام أحد الرمزين ه أو هَ :

① ٥ ∈ .... ② $\sqrt{١٠}$ ∈ .... ③ صفر ∈ ....

④ −٠,٧ ∈ .... ⑤ $\sqrt[٣]{٨}$ ∈ .... ⑥ $\sqrt[٣]{٦}$ ∈ ....

⑦ $\sqrt[٣]{-٩}$ ∈ .... ⑧ $\sqrt{\frac{٤}{٩}}$ ∈ .... ⑨ $\frac{١}{٣}\pi$ ∈ ....

(٣) اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

① $\frac{صفر}{٥}$ ∈ .... [ص+ أ، ص− أ، ه أ، هَ]

② |−٥| ∈ .... [ص− أ، ه أ، هَ أ، غير ذلك]

③ $\sqrt[٣]{-٤}$ ∈ .... [ط أ، ص− أ، ه أ، هَ]

④ ٢,٣ × ١٠^٥ ∈ .... [ط أ، ص− أ، ح− أ، هَ]

⑤ $\sqrt{٧}$ .... ٣ [< أ، > أ، = أ، ⩽]

⑥ $\sqrt[٣]{١٠}$ .... ٢ [< أ، > أ، = أ، ⩽]

⑦ $\sqrt[٣]{٢٠}$ .... $\sqrt{٩}$ [< أ، > أ، = أ، غير ذلك]

⑧ $\sqrt{١٠}$ ≃ .... [٢,٩٩ أ، ٣٠,٧١ أ، ٣ أ، −٣,٢]

⑨ العدد الصحيح الذى ينحصر بين ٣$\sqrt{٢}$ ، ٢$\sqrt{٧}$ هو ....

[٤,٥ أ، ٥ أ، ٤ أ، ٥,٥]

⑩ أى عدد غير نسبى تقع قيمته بين عددين ....

[صحيحين أ، نسبيين أ، غير نسبيين أ، طبيعيين]

⑪ العدد غير النسبى المحصور بين العددين ٢ ، ٣ هو ....

[$\sqrt{١٠}$ أ، $\sqrt{٧}$ أ، $\frac{٥}{٢}$ أ، ٢$\sqrt{٣}$]

⑫ $\sqrt{٩}$ + $\sqrt[٣]{٤}$ ∈ .... [ص− أ، ص+ أ، ه أ، هَ]

⑬ العدد غير النسبى المحصور بين −٢ ، −١ هو ....

[$\sqrt{٢}$ أ، −٣ أ، −١,٥ أ، −$\sqrt{٣}$]

⑭ أقرب عدد صحيح للعدد $\sqrt[٣]{٢٥}$ هو ....

[٥ أ، ٣ أ، ٢ أ، ١٢,٥]

⑮ ه ∩ هَ = ... [φ أ، ح أ، ص أ، صفر]

⑯ ه ∪ هَ = ... [φ أ، ح أ، ص أ، صفر]

⑰ ح+ ∩ ح− = ... [φ أ، ح أ، صفر أ، ح − {٠}]

⑱ ح+ ∪ ح− = ... [φ أ، ح أ، صفر أ، ح − {٠}]

⑲ ح* = ح − .... [φ أ، ح− أ، ح+ أ، {٠}]

(٤) أى الأعداد الآتية نسبى وأيها غير نسبى :

$\sqrt{٢}$ ، ٣ ، $\sqrt{٤}$ ، صفر ، $\sqrt[٣]{٢٧}$ ، −٠,٧ ، −$\sqrt{\frac{١٦}{٢٥}}$ ، $\sqrt{٠,٩}$ ، $\frac{\pi}{٢}$

مسائل المستوى الثانى

(٥) أوجد عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما العدد :

① $\sqrt{٥}$ ② $\sqrt{١٢}$ ③ $\sqrt[٣]{١٠}$ ④ $\sqrt[٣]{-٢٠}$

(٦) إذا كانت س عدداً صحيحاً فأوجد قيمة س فى كل من الحالات الآتية :

① س < $\sqrt{٧}$ < س + ١ ② س < $\sqrt{٨٠}$ < س + ١

③ س < $\sqrt{١٢٥}$ < س + ١ ④ س < $\sqrt[٣]{٥}$ < س + ١

⑤ س < $\sqrt[٣]{٣٠}$ < س + ١ ⑥ س < $\sqrt[٣]{١٠٠}$ < س + ١

(٧) ① أوجد لأقرب جزء من عشرة قيمة $\sqrt{٦}$

② أوجد لأقرب جزء من مائة قيمة $\sqrt{١١}$

③ أوجد لأقرب جزء من عشرة قيمة $\sqrt[٣]{٢}$



٨ أوجد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{١٠}$ وتحقق من صحة إجابتك باستخدام الآلة الحاسبة

---

٩ أثبت أن :

① $١,٧ < \sqrt{٣} < ١,٨$ ② $٢,٢٣ < \sqrt{٥} < ٢,٢٤$

③ $٢,٤٤ < \sqrt{٦} < ٢,٤٥$ ④ $٢,٦٤ < \sqrt{٧} < ٢,٦٥$

---

١٠ أثبت أن :

① $\sqrt{١٠}$ ينحصر بين ٣,١ ، ٣,٢ ② $\sqrt{١١}$ ينحصر بين ٣,٣١ ، ٣,٣٢

③ $\sqrt{١٣}$ ينحصر بين ٣,٦٠ ، ٣,٦١ ④ $\sqrt{١٥}$ ينحصر بين ٣,٨٧ ، ٣,٨٨

⑤ $\sqrt[٣]{١١}$ ينحصر بين ٢,٢٢ ، ٢,٢٣ ⑥ $\sqrt[٣]{٥١}$ ينحصر بين ٣,٧ ، ٣,٨

---

١١ رتب تنازلياً :

$\sqrt{٦٢}$ ، ٨ ، $-\sqrt{٥٠}$ ، $\sqrt{٧٠}$

---

١٢ حدد النقط التى تمثل الأعداد الآتية على خط الأعداد :

① $\sqrt{٥}$ ② $\sqrt{٦}$ ③ $٢ + \sqrt{٥}$

④ $٢ - \sqrt{٥}$ ⑤ $٣ - \sqrt{٦}$ ⑥ $-٢ + \sqrt{٧}$

⑦ $-٢ - \sqrt{٧}$ ⑧ $٢\sqrt{٥}$ ⑨ $٢\sqrt{٥} + ١$

---

١٣ ارسم خط الأعداد وحدد عليه النقطة أ التى تمثل العدد ٢ و النقطة ب التى تمثل العدد $١ + \sqrt{٢}$ والنقطة جـ التى تمثل العدد $١ - \sqrt{٢}$

---

١٤ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى ح :

① $س^٢ = ٣$ $\{\pm\sqrt{٣}\}$ ② $س^٣ = ٩$ $\{\sqrt[٣]{٩}\}$

③ $-\frac{١}{٢} س^٢ = ١$ ϕ ④ $٠,٠٠١ س^٣ = -٨$ ϕ

⑤ $٢ س^٢ - ٤ = ١٦$ $\{\pm\sqrt{١٠}\}$ ⑥ $٣ س^٣ - ٧ = ٢٠$ $\{\sqrt[٣]{٩}\}$

⑦ $\frac{٢}{٥} س^٢ + ٥ = ٧$ $\{\pm\sqrt{٥}\}$ ⑧ $\frac{٣}{٧} س^٢ - ١ = ٢$ $\{\pm\sqrt{٧}\}$

⑨ $(س - ١)^٢ = ٤$ ϕ ⑩ $(س^٢ - ٢)^٣ = ١$ $\{\pm\sqrt{٣}\}$



١٥ ① أوجد كلاً من طول ضلع و طول قطر مربع مساحته ٧ سم² [$\sqrt{٧}$ ، $\sqrt{١٤}$]

② دائرة مساحة سطحها ٣ π أوجد محيطها [$٢\sqrt{٣}\pi$ سم]

---

١٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :

① المربع الذى طول ضلعه $\sqrt{٣}$ سم تكون مساحته = ... سم²

[$٤\sqrt{٣}$ أو ٩١ أو ٣ أو ٦]

② المربع الذى مساحته ١٠ سم² يكون طول ضلعه .... سم

[٥ أو -٥ أو $\sqrt{١٠}$ أو $-\sqrt{١٠}$]

③ المكعب الذى حجمه ٦٤ سم³ يكون طول حرفه .... سم

[٨ أو ٤ أو ٦ أو ٦٤]

④ إذا كان س ∈ ص و كان $س < \sqrt[٣]{-٢٥} < س + ١$ فإن س = ...

[-١ أو -٢ أو -٣ أو -٤]

⑤ إذا كان س ∈ ص و كان $س < |-\sqrt{٤٥}| < س + ١$ فإن س = ...

[٥ أو ٦ أو ٧ أو ٨]

مسائل المتفوقين

١٧ ارسم المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب حيث أ ب = ٢ سم ، ب جـ = ٣ سم واستخدم الشكل فى تحديد النقطة التى تمثل العدد $\sqrt{١٣}$ والنقطة التى تمثل العدد $-\sqrt{١٣}$ على خط الأعداد

---

١٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :

إذا كان $\frac{١}{أ}$ ، $\frac{أ}{\sqrt{٥}}$ عددان حقيقيان يقعان بين صفر ، ١ فإن أ = ...

[-٢ أو ١ أو $\sqrt{٥}$ أو ٢]

---

١٩ أكتب أربعة أعداد غير نسبية محصورة بين ٦ ، ٨

---

٢٠ أوجد مجموعة حل المعادلة $س + ٢\sqrt{٣} = ٣$ ومثل الحل على خط الأعداد



الفـــــترات

إذا اتصلت تليفونياً بأحد أصدقائك فى أوقات مختلفة مثل الساعة ٤ ، و الساعة ٥ ، و الساعة ٦ و وجدت تليفونه مشغول فتقول اتصلت فى **مجموعة** أوقات مختلفة و يمكن كتابة هذه الأوقات فى صورة مجموعة مثل {٤ ، ٥ ، ٦} لأنها أوقات مختلفة و متباعدة

أما إذا رد صديقك و ظلت المكالمة من الساعة ٤ إلى الساعة ٦ دون انقطاع فتقول أننا أتصلنا **فترة** زمنية من الساعة ٤ إلى الساعة ٦ و ما بينهما و فى هذه الحالة تكتب بالصورة [٤ ، ٦] و هنا يتضح الفرق بين المجموعة و الفترة

فالفترة تكون متصلة دون انقطاع لعددين و ما بينهما و نضعها فى أقواس بالشكل [ ]

أما المجموعة فهى لأوقات أو أعداد متقطعة أو متباعدة و نضعها فى أقواس بالشكل { }

و المجموعة يكتب فيها عدد أو أكثر و عند دراسة مجموعة الأعداد الحقيقية فإننا نحتاج للتعامل مع مجموعات جزئية من الأعداد الحقيقية فإذا نظرنا لخط الأعداد الحقيقية نجده يمثل مجموعة من الأعداد الحقيقية فى صورة نقط متصلة

فإذا أردنا أن نأخذ أرقام بعينها مثل ٢، ٣، ٤، ٥ فتكتب فى صورة مجموعة

أما إذا أردنا أرقام أو أعداد من ٢ إلى ٤ و ما بينهما فتكتب فى صورة فترة

و مما سبق نجد أن :

الفترات هى مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

و هى نوعان (فترات محدودة - فترات غير محدودة)

أولاً : الفترات المحدودة

الفترة المغلقة

يمكن التعبير عن مجموعة الأعداد الحقيقية التى تتكون من العددين ٢، ٥ و جميع الأعداد الحقيقية المحصورة بينهما بطريقتين :

طريقة الصفة المميزة بالشكل { س : س ∈ ح ، ٢ ≤ س ≤ ٥ }

أو بصورة فترة بالشكل [٢ ، ٥] و تسمى فترة مغلقة لأننا أخذنا العددين ٢ ، ٥ مع مجموعة الأعداد الحقيقية المحصورة بينهما لاحظ أن ٢ ∈ [٢ ، ٥] ، ٥ ∈ [٢ ، ٥]



الفترة المفتوحة

أما إذا أخذنا الأعداد الحقيقية المحصورة بين ٢ ، ٥ و ليس معهم ٢ ، ٥ فتكتب بالصورة]٢ ، ٥[

و تسمى هذه الفترة بالفترة المفتوحة و نلاحظ هنا أن ٢ ∉]٢ ، ٥[، ٥ ∉]٢ ، ٥[

الفترة النصف مفتوحة أو النصف مغلقة

و إذا أخذنا مجموعة الأعداد المحصورة بين ٢ ، ٥ و معها العدد ٢ تكتب بالصورة [٢ ، ٥[

و تسمى فترة نصف مفتوحة و نلاحظ هنا أن ٢ ∈ [٢ ، ٥[أما ٥ ∉ [٢ ، ٥[

وفيما يلى **ملخص للفترات المحدودة** :

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين ، أ < ب فإن :

الفترة	التعبير عنها بالصفة المميزة	تمثيلها على خط الأعداد
فترة مغلقة [أ ، ب]	{ س : س ∈ ح ، أ ≤ س ≤ ب }	أ ب
فترة مفتوحة]أ ، ب[	{ س : س ∈ ح ، أ < س < ب }	أ ب
فترة نصف مغلقة [أ ، ب[	{ س : س ∈ ح ، أ ≤ س < ب }	أ ب
أو نصف مفتوحة]أ ، ب]	{ س : س ∈ ح ، أ < س ≤ ب }	أ ب

ثانياً : الفترات غير المحدودة

إذا أردنا التعبير عن مجموعة من الأعداد الحقيقية تبدأ بعدد معين و غير منتهية مثل العدد ٢ و جميع الأعداد التى أكبر منه فيمكن التعبير عنها بطريقة الصفة المميزة بالشكل { س : س ∈ ح ، س ≥ ٢ } أو بصورة فترة بالشكل [٢ ، ∞[و هذه الفترة غير محدودة لأنها تبدأ بالعدد ٢ و لكنها غير منتهية مع ملاحظة ما يلى :

- الرمز ∞ يقرأ ما لا نهاية و يعنى أنه أكبر من أى عدد يمكن تصوره
- الرمز -∞ يقرأ سالب ما لا نهاية ويعنى أنه أصغر من أى عدد يمكن تصوره
- الرمزان ∞ ، -∞ ليسا عددين حقيقيين و لا توجد نقط تمثلهما



وفيما يلي ملخص للفترات غير المحدودة :

إذا كان أ ∈ ح فإن :

الفترة	التعبير عنها بالصفة المميزة	تمثيلها على خط الأعداد
[أ ، ∞[	{س : س ∈ ح ، س ≥ أ}	أ
]أ ، ∞[	{س : س ∈ ح ، س > أ}	أ
]-∞ ، أ]	{س : س ∈ ح ، س ≤ أ}	أ
]-∞ ، أ[	{س : س ∈ ح ، س < أ}	أ

ملاحظات

]-∞ ، ∞[= {س : س ∈ ح ، -∞ < س < ∞} = ح

- مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة =]٠ ، ∞[
- مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة =]-∞ ، ٠[
- مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة =]-∞ ، ٠] (أي السالبة والصفر)
- مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة = [٠ ، ∞[(أي الموجبة والصفر)

أمثلة توضيحية

مثال ١ اكتب كلاً مما يأتي على صورة فترة ثم مثلها على خط الأعداد :

① س = {س : س ∈ ح ، -١ < س ≤ ٣}

② ص = {س : س ∈ ح ، س > ٢}

الحل

① س =]-١ ، ٣]

-٣ -٢ -١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤

لاحظ أن العدد ٣ ∈ للفترة لذلك فإننا نضع دائرة و نظللها أما -١ ∉ للفترة لذلك نضع دائرة غير مظللة على خط الأعداد

ملاحظة
عند كتابة الفترة يجب كتابة العدد الأصغر أولاً



② ص =]٢ ، ∞[

-٣ -٢ -١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤

لاحظ أن ٢ ∉ للفترة فنضع دائرة فارغة غير مظللة أما ∞ فتعني إلى ما لا نهاية لذلك نظلل خط الأعداد من الجهة الموجبة حتى رأس السهم

مثال ٢ عبر عن كلاً من الفترات الآتية رمزياً بطريقة الصفة المميزة ومثلها على خط الأعداد:

① [٢ ، ٤] ②]-٢ ، ١] ③]٠ ، ∞[

الحل

① [٢ ، ٤] = {س : س ∈ ح ، ٢ ≤ س ≤ ٤}

-١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥

②]-٢ ، ١] = {س : س ∈ ح ، -٢ < س ≤ ١}

-٣ -٢ -١ ٠ ١ ٢

③]٠ ، ∞[= {س : س ∈ ح ، س > ٠}

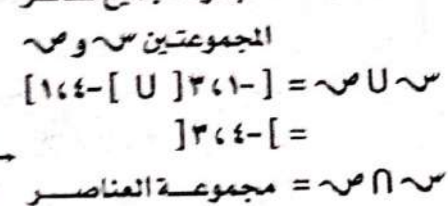
-٢ -١ ٠ ١ ٢

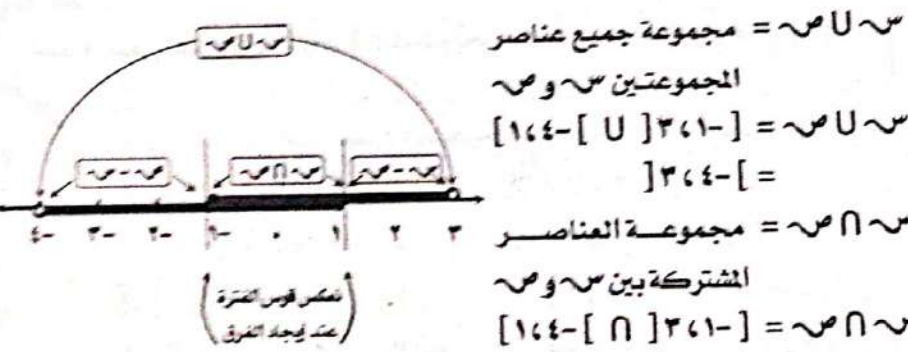
مثال ٣ إذا كانت س = [-١ ، ٣[، ص =]-٤ ، ١]

أوجد كلاً مما يأتي في صورة فترة مستعيناً بخط الأعداد :

س ∪ ص ، س ∩ ص ، س - ص ، ص - س ، سَ

الحل





س ∪ ص = مجموعة جميع عناصر المجموعتين س و ص

س ∪ ص = [-١ ، ٣[∪]-٤ ، ١]

=]-٤ ، ٣[

س ∩ ص = مجموعة العناصر المشتركة بين س و ص

س ∩ ص = [-١ ، ٣[∩]-٤ ، ١]

= [-١ ، ١]



س - ص = مجموعة العناصر الموجودة فى س و غير الموجودة فى ص

س - ص = [-١، ٣] -]-٤، ١]

=]١، ٣]

ص - س = مجموعة العناصر الموجودة فى ص و غير موجودة فى س

ص - س =]-٤، ١] - [-١، ٣]

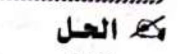
=]-٤، -١[

س' = ع - مجموعة عناصر س (وتعنى مكملة المجموعة س)

س' = ع - [-١، ٣] أى]-∞، -١[∪]٣، ∞[

مثال ٤ اكتب ما يأتى على صورة فترة مع التوضيح بالرسم على خط الأعداد :

①]-∞، ٣] ∩ [١، ∞[②]-١، ٣[- [-١، ١]



الحل

①]-∞، ٣] ∩ [١، ∞[= [١، ٣]

-١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤

②]-١، ٣[- [-١، ١] =]١، ٣[

-٢ -١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤

مثال ٥ أوجد مستعيناً بخط الأعداد [٢، ٥] - {١، ٥}

الحل

[٢، ٥] - {١، ٥} = [٢، ٥[

-١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦

لاحظ أن :

العدد ٥ ينتمى للفترة و المجموعة (التقاطع يُحذف عند إيجاد الفرق بين مجموعتين)

مثال ٦ ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارة الخطأ :

① -٢ ∈ [-١، ١] ② ٣ ∈ [٣، ٧[

③ √٤ ∉ [٢، ٣[④ {٢، ٤} ⊂ [٢، ٤[

⑤ {١، ٥} ∩ [١، ٥[= {١} ⑥ {٢، ٣} ∪]٢، ٣[= [٢، ٣]

⑦ [٣، ٥[- {٣، ٥} =]٣، ٥[⑧ ط ∩ [-٢، ٢[= {٠، ١، ٢}

⑨ ع- ∪ ع+ = ع ⑩ √٥ ∈]٢، ٣[



الحل

① × ② ✓ ③ × ④ × ⑤ ✓

⑥ ✓ ⑦ ✓ ⑧ × ⑨ × ⑩ ✓

أمثلة للتدريب

تدريب (١)

① { س : س ∈ ع ، -١ < س ≤ ٣ } على صورة فترة هى ....

وتمثل على خط الأعداد بالشكل

-٢ -١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤

②]٠، ٤] رمزياً بطريقة الصفة المميزة هى { .... }

وتمثل على خط الأعداد بالشكل

-١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥

تدريب (٢)

إذا كان س =]-٢، ١] ، ص = [٠، ٣[**فأوجد مستعيناً بخط الأعداد** كل مما يأتى :

-٣ -٢ -١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤

س ∪ ص = ... ، س ∩ ص = ...

س - ص = ... ، ص - س = ...

تدريب (٣)

أكمل كلاً مما يأتى على صورة فترة مستعيناً بخط الأعداد المرسوم :

①]٢، ∞[∪ [٠، ٤[= ....

]٢، ∞[- [٠، ٤[= ....

-١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥

②]-∞، ١[∩ [-١، ∞[= ....

]-∞، ١[- [-١، ∞[= ....

-٢ -١ ٠ ١ ٢ ٣





تمارين (٤) على الفترات

أولاً : راجع معنا واختبر نفسك — $\frac{1}{3}$ ساعة امتحان ومراجعة — ١٠ — اختبار تراكمي (٢)

١ (أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

① العدد غير النسبي المحصور بين ٣ ، ٤ هو ....

[$\sqrt{10}$ ، $\sqrt{17}$ ، ٣,٥ ، $\sqrt{3}$]

② أقرب عدد صحيح للعدد $|\sqrt[3]{-36}|$ هو ....

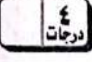
[٦ ، ٣ ، ٤ ، -٣]

③ م . ح للمعادلة $(س + ٩)^2 = ٠$ هى ....

[{٣ ، -٣} ، {٠ ، ٩} ، {٠ ، -٩} ، {-٩}]

④ م . ح للمعادلة $\frac{1}{8}$ $س^3$ + ١ = -٧ هى { .... }

[٢ ، -٢ ، ٤ ، -٤]


٤ درجات

(ب) حدد النقطة التى تمثل العدد ٣ - $\sqrt{5}$ على خط الأعداد

....

....

....

....

٣ درجات

(جـ) أوجد عددين نسبيين ينحصر بينهما العدد $\sqrt{3}$

....

....

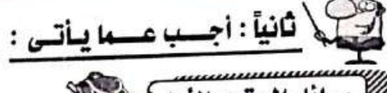
....

....

٣ درجات



ثانياً : أجب عما يأتى :



٢ عبر عن مجموعات الأعداد الآتية على صورة فترة و مثلها على خط الأعداد :

① { س : س ∈ ح ، -٣ < س ≤ ١ }

② { س : س ∈ ح ، ١ ≤ س ≤ ٧ }

③ { س : س ∈ ح ، ١ ≤ س < ٥ }

④ { س : س ∈ ح ، $\sqrt[3]{8}$ < س < ٦ }

⑤ { س : س ∈ ح ، -١ ≤ س - ١ ≤ ٣ }

⑥ مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة

⑦ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة

٣ مثل كلاً من الفترات الآتية على خط الأعداد و عبر عنها رمزياً بطريقة الصفة المميزة :

① [١ ، ٦] ② [-٢ ، ٣[③]-٢ ، ٥]

④]-٣ ، ١[⑤ [٣ ، ∞[⑥ [٠ ، ٥]

⑦]-∞ ، ٤[⑧]-∞ ، ∞[⑨ $ح_+$ ∪ {٠}

٤ أكمل كلا مما يأتى مستخدماً أحد الرمزين ∈ أو ∉ :

① $\sqrt{2}$ .... [١ ، ٢]

② ٤$\sqrt{5}$ ....]٣ ، ٥]

③ |-٥| .... [٤ ، ٦[

④ $\sqrt[3]{-8}$ .... [-١ ، ٢]

⑤ ٢,٣ × $١٠^{-٥}$ ....]٠ ، ١[

⑥ ٤ ....]$\sqrt{8}$ ، $\sqrt[3]{75}$[

⑦ ٥ ....]$\sqrt{5}$ ، $\sqrt[3]{125}$[

⑧ $\sqrt[3]{-27}$ ....]-$\sqrt{9}$ ، $\sqrt{9}$]

٥ إذا كانت س = [١ ، ٤[، ص =]-٢ ، ٣] فأوجد :

① س ∪ ص ② س ∩ ص ③ س - ص

④ ص - س ⑤ $س'$ ⑥ $ص'$



(٦) إذا كانت س =]-∞ ، ٢] ، ص = [-٢ ، ∞[فأوجد :

① س ∪ ص ② س ∩ ص ③ س - ص

④ ص - س ⑤ س′ ⑥ ص′

مسائل المستوى الثانى

(٧) أوجد كلا مما يأتى على صورة فترة مستعيناً بخط الأعداد :

① [-١ ، ∞[∪ [-٢ ، ٣] ② [١ ، ∞[∩ [-١ ، ٢]

③]-∞ ، ١] ∪]-١ ، ∞[④]-∞ ، ٢] ∩ [٠ ، ∞[

⑤]-∞ ، ٤] ∪ [-١ ، ٢] ⑥]-∞ ، ٣[∩ [-٢ ، ١]

⑦]-∞ ، ٣] - [١ ، ∞[⑧]-∞ ، ٢] - [٠ ، ٤]

⑨]-∞ ، ٢] -]-∞ ، ١] ⑩]-∞ ، -٣] -]-∞ ، ١]

(٨) أوجد كلا مما يأتى على صورة فترة مستعيناً بخط الأعداد :

① [٤ ، ٨] ∩]-٣ ، ٥] ② [-٢ ، ٥[∪]٤ ، ٦]

③ [٣ ، ٧[∩]-١ ، ٤[④ [٢ ، ٦] -]-١ ، ٣[

⑤]-١ ، ٣] ∪ [٢ ، ٥[⑥ [-٢ ، ٤] ∩ [١ ، ٢]

⑦ [-٢ ، ٣[- [١ ، ٥] ⑧ [-٢ ، ٢] ∪ [٠ ، ٣[

⑨ [١ ، ٦[∩]٢ ، ٤[⑩ [٢ ، ٤] -]٢ ، ٤[

(٩) أكمل لتحصل على عبارة صحيحة :

① [٢ ، ٣] ∪ {٢ ، ٣} = ... ② [٢ ، ٣] ∩ {٢ ، ٣} = ...

③]٢ ، ٣[∪ {٢ ، ٣} = ... ④]٢ ، ٣[∩ {٢ ، ٣} = ...

⑤ [٢ ، ٣] - {٢ ، ٣} = ... ⑥]٢ ، ٣[- {٢ ، ٣} = ...

⑦ {٢ ، ٣} - [٢ ، ٣] = ... ⑧ {٢ ، ٣} -]٢ ، ٣[= ....

⑨]٢ ، ٣] ∪ {٢ ، ٣} = ... ⑩]٢ ، ٣] ∩ {٢ ، ٣} = ...

⑪]٢ ، ٣] - {٢ ، ٣} = ... ⑫]٢ ، ٣] - {٣ ، ٤} = ...

⑬]٢ ، ٣] - {١ ، ٢} = ... ⑭]٢ ، ٣] ∩ {٣ ، ٤} = ...

(١٠) أكمل لتحصل على عبارة صحيحة :

① ع - ع+ = ... ② إذا كانت س ∈ [١ ، ٢٥] فإن √س ∈ ....

③]-٣ ، ١] ∩ ع+ = ... ④ ع -]-∞ ، ٠] = ...

⑤]-١ ، ٣] - ع+ = ... ⑥ ط ∩ [-٣ ، ٣[= ....

(١١) إذا كانت س =]-٢ ، ٧[، ص = [٤ ، ٦] فأوجد باستخدام الفترات :

① س ∩ ص ② س ∪ ص ③ س - ص ④ ص - س

(١٢) إذا كانت س = [-٣ ، ١] ، ص =]١ ، ∞[فأوجد :

① س ∪ ص ② س ∩ ص ③ س - ص

④ ص - س ⑤ س′ ⑥ ص′

(١٣) اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

① [٢ ، ٣] -]-١ ، ٥[= ....

[ ]-١ ، ٣] أو]-١ ، ٢] أو [٣ ، ٥[أو φ]

②]-٣ ، ٥[∩]٠ ، ٣[= ....

[φ أو]٠ ، ٣[أو [٠ ، ٣] أو [٠ ، ٣[ ]

③]١ ، ٥[- [١ ، ٥] = ...

[φ أو]١ ، ٥] أو {١ ، ٥} أو {١}]

④ [٢ ، ∞[-]-٢ ، ٣[= ....

[φ أو]٣ ، ∞[أو [٣ ، ∞[أو [٢ ، ∞[ ]

⑤ [١ ، ٢[∩]١ ، ٢] = ...

[[١ ، ٢[أو {١ ، ٢} أو [١ ، ٢] أو]١ ، ٢[ ]

⑥]-٥ ، ٤] ∩ [-١ ، ٥] = ...

[ ]-١ ، ٤[أو [-١ ، ٤] أو [-٥ ، ٥] أو [٤ ، ٥[ ]

⑦]-١ ، ١[∪]١ ، ٥] = ...

[φ أو]-١ ، ٥[أو]-١ ، ٥] - {١} أو]-١ ، ٥]]



⑧ √٣ ∈ ....

[[٣،٤] أ]٠،١[أ]١،٢[أ]٢،٣[ ]

⑨ 📖]-١،٢[- [١،٤] = ...

[φ أ]-١،١[أ [-١،١] أ]-١،١]]

⑩]-∞،٣[∪]٤،∞[= ....

[ح - {٣،٤} أ ح أ ح - [٣،٤] أ ح -]٣،٤[ ]

⑪]-∞،٣[∪]٢،∞[= ....

[ح أ ح - {٢،٣} أ ح - [٢،٣] أ ح -]٢،٣[ ]

⑫ [٣،٧] - [٤،٧] = ...

[{٤} أ [٣،٤] أ [٣،٤[أ φ]

⑬]١،٥] ∪ {١،٥} = ...

[{٥} أ [١،٥] أ]١،٥] أ]١،٥[ ]

⑭]٢،٦] ∩ {٢،٦} = ...

[φ أ {٢،٦} أ {٦} أ [٢،٦]]

⑮]-٣،٢] - {-٣،٥} = ...

[{٢} أ]-٣،٥[أ]-٣،٢[أ]-٣،٢]]

⑯]٢،٦[∪ {٢،٥} = ...

[ ]٢،٦] أ [٢،٦] أ [٢،٥] أ [٢،٦[ ]

⑰ 📖 [٢،٧] - {٢،٧} = ...

[[١،٦] أ [٢،٧] أ]٢،٧[أ φ]

⑱ {٢،٣،٤} - [٢،٤] = ...

[φ أ {٢،٤} أ {٣} أ]٢،٣[∪]٣،٤[ ]

⑲ إذا كانت س + ٢ ∈]١،٤[فإن ٢س ∈ ....

[ ]-١،٢[أ]-٢،٤[أ]٢،٨[أ غير ذلك]

⑭ 📖 إذا كانت س = [-١،٤] ، ص =]٣،∞[، ع = {٣،٤} فأوجد :

① س - ع ② ص ∩ ع ③ س′ ④ ص′

مسائل المتفوقين

⑮ ① إذا كان س ∩ ص = [٣،٦] ، س ∪ ص = [٢،٦] ، س ⊂ ص

فأوجد س ، ص ، س - ص ، ص - س

② إذا كان أ ∩ ب = [٢،٤] ، أ ∪ ب = [١،٦] ، أ - ب =]٤،٦[فأوجد أ ، ب

③ إذا كانت]-∞، أ] ∩ [-٣،٤] = [-٣،٢] فأوجد قيمة أ

④ إذا كانت $س^٢$ < س فإن س ∈ أى مما يأتى :

[[٠،١[أ [-١،٠[أ]٠،١] أ]٠،١[ ]

⑯ أكمل ما يأتى :

① إذا كانت س ∈]٠،٣[فإن $س^٢$ ∈ ....

② إذا كانت س ∈ [-٢،٣] فإن $س^٢$ ∈ ....

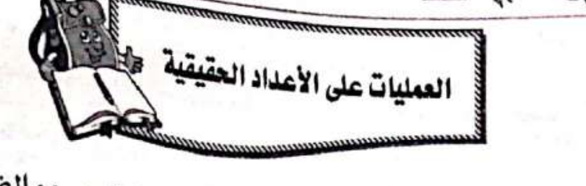
③ إذا كانت س ∈ [٩،١٦[فإن √س ∈ ....

④ إذا كانت س ∈ [٠،٩] فإن -√س ∈ ....

⑤ إذا كانت $س^٢$ ∈ [٠،٤] فإن $س^٣$ ∈ ....

⑥ إذا كانت $س^٢$ ∈]١،٩] فإن س ∈ ....





يمكن إجراء بعض العمليات على الأعداد الحقيقية كالجمع و الضرب ، ..... و لإجراء هذه العمليات يجب أن نتعرف على خواص هذه العمليات

أولاً : خواص جمع الأعداد الحقيقية

لكل أ ∈ ع ، ب ∈ ع ، جـ ∈ ع يمكن إدراك خواص عملية الجمع الآتية :

① **الإنغلاق** : مجموع أى عددين حقيقيين هو عدد حقيقى أى أن أ + ب ∈ ع

فمثلاً $\sqrt{٥} + \sqrt{٥} = ٢\sqrt{٥}$ ∈ ع ، ٢ + ٤ = ٦ ∈ ع

② **الأبدال** : لكل عددين حقيقيين أ ، ب يكون أ + ب = ب + أ

فمثلاً ٢ + ٣ = ٣ + ٢ = ٥ ، $٢\sqrt{٧} + ٤\sqrt{٧} = ٤\sqrt{٧} + ٢\sqrt{٧} = ٦\sqrt{٧}$

③ **الدمج** : (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) = أ + ب + جـ

فمثلاً (٣ + ٥) + ٤ = ٨ + ٤ = ١٢ ، ٣ + (٥ + ٤) = ٣ + ٩ = ١٢

أى أن (٣ + ٥) + ٤ = ٣ + (٥ + ٤) = ٣ + ٥ + ٤ = ١٢

④ **المحايد الجمعى** : الصفر هو العنصر المحايد الجمعى لأن أ + ٠ = ٠ + أ = أ

فمثلاً ٣ + ٠ = ٣ ، $٠ + \sqrt{٢} = \sqrt{٢}$

⑤ **المعكوس الجمعى** : لكل عدد حقيقى أ يوجد معكوس جمعى هو - أ ∈ ع بحيث أ + (- أ) = صفر (المحايد الجمعى)

فمثلاً ٣ معكوسه الجمعى - ٣ ، $\sqrt{٥}$ معكوسه الجمعى $(-\sqrt{٥})$

حيث ٣ + (- ٣) = صفر ، $\sqrt{٥} + (-\sqrt{٥})$ = صفر



لاحظ أن : المعكوس الجمعى للعدد صفر هو نفسه

حيث أن كل عدد حقيقى له معكوس جمعى فإن عملية الطرح ممكنة دائماً فى ع حيث أ - ب = أ + (- ب) أى أن عملية الطرح أ - ب تعنى جمع العدد أ مع المعكوس الجمعى للعدد ب أى أن عملية الطرح مغلقة و لكنها ليست إبدالية و ليست دامجة و لا يوجد لها عنصر محايد أو معكوس

ثانياً : خواص ضرب الأعداد الحقيقية

لكل أ ∈ ع ، ب ∈ ع ، جـ ∈ ع يمكن إدراك خواص الضرب الآتية :

① **الإنغلاق** : حاصل ضرب أى عددين حقيقيين هو عدد حقيقى

فمثلاً ٢ × ٣ = ٦ ، $٢ \times \sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٢} \times \sqrt{٢} = ٢$ ∈ ع

② **الأبدال** : لكل عددين حقيقيين أ ، ب يكون أ × ب = ب × أ

فمثلاً ٣ × ٥ = ٥ × ٣ = ١٥ ، $٢ \times \sqrt{٣} = \sqrt{٣} \times ٢ = ٢\sqrt{٣}$

③ **الدمج** : (أ × ب) × جـ = أ × (ب × جـ) = أ × ب × جـ

فمثلاً $(٢ \times \sqrt{٣}) \times ٤ = ٢\sqrt{٣} \times ٤ = ٨\sqrt{٣}$

$٢ \times (\sqrt{٣} \times ٤) = ٢ \times ٤\sqrt{٣} = ٨\sqrt{٣}$

أى أن $(٢ \times \sqrt{٣}) \times ٤ = ٢ \times (\sqrt{٣} \times ٤) = ٨\sqrt{٣}$

④ **المحايد الضربى** : الواحد هو العنصر المحايد الضربى لأن أ × ١ = ١ × أ = أ

فمثلاً ٦ × ١ = ١ × ٦ = ٦ ، $\sqrt{٢} \times ١ = ١ \times \sqrt{٢} = \sqrt{٢}$

⑤ **المعكوس الضربى** : لكل عدد حقيقى أ ∈ ع* يوجد معكوس ضربى هو $\frac{١}{أ}$ ∈ ع بحيث أ × $\frac{١}{أ}$ = ١ (المحايد الضربى)

فمثلاً المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{٣}$ هو $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ حيث $\sqrt{٣} \times \frac{١}{\sqrt{٣}} = ١$

لاحظ أن : المعكوس الضربى للعدد ١ هو ١ والمعكوس الضربى للعدد -١ هو -١

ولا يوجد معكوس ضربى للعدد صفر (لأن $\frac{١}{٠}$ ليس لها معنى)

حيث أن لكل عدد حقيقى لا يساوى الصفر له معكوس ضربى فإن عملية القسمة على أى عدد خلاف الصفر ممكنة دائماً فى ح حيث أن $أ \div ب = أ \times \frac{١}{ب}$ ، $ب \neq ٠$

أى أن عملية القسمة $أ \div ب$ تعنى ضرب العدد أ فى المعكوس الضربى للعدد ب

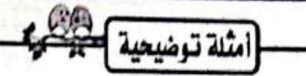
أى أن عملية القسمة مغلقة ولكنها ليست أبدالية وليست دامجة ولا يوجد لها عنصر محايد أو معكوس

تذكر قاعدة فك الأقواس

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين فإن :

① $-(-أ) = أ$ ② $أ(-ب) = -أب$

③ $(-أ)(-ب) = أب$ ④ $-(أ-ب) = -أ+ب$



أمثلة توضيحية

مثال ١ أوجد ناتج ما يأتى فى أبسط صورة :

① $٢\sqrt{٣} + \sqrt{٥} + ٣\sqrt{٣}$ ② $٢\sqrt{٢} \times ٣\sqrt{٢}$

③ $\sqrt{٣}\,(٢\sqrt{٣} + ٤)$ ④ $٢\sqrt{٥}\left(٣\sqrt{٥} + \frac{١}{\sqrt{٥}}\right)$

الحل

① $٢\sqrt{٣} + \sqrt{٥} + ٣\sqrt{٣} = (٢\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٣}) + \sqrt{٥} = ٥\sqrt{٣} + \sqrt{٥}$

② $٢\sqrt{٢} \times ٣\sqrt{٢} = ٢ \times ٣ \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} = ٦ \times ٢ = ١٢$

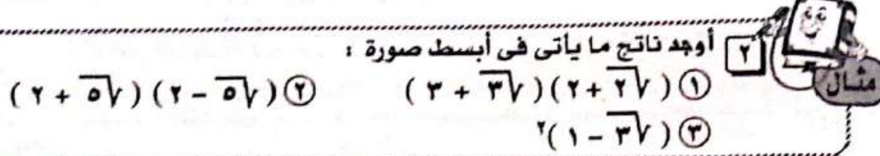
③ $\sqrt{٣}\,(٢\sqrt{٣} + ٤) = ٢\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} + ٤ \times \sqrt{٣}$

$= ٢ \times ٣ + ٤\sqrt{٣} = ٦ + ٤\sqrt{٣}$

④ $٢\sqrt{٥}\left(٣\sqrt{٥} + \frac{١}{\sqrt{٥}}\right) = ٢\sqrt{٥} \times ٣\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٥} \times \frac{١}{\sqrt{٥}}$

$= ٢ \times ٣ \times ٥ + \frac{٢\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = ٣٠ + ٢ = ٣٢$





مثال ٢ أوجد ناتج ما يأتى فى أبسط صورة :

① $(\sqrt{٢} + ٢)(\sqrt{٣} + ٣)$ ② $(\sqrt{٥} - ٢)(\sqrt{٥} + ٢)$

③ $(\sqrt{٣} - ١)^٢$

الحل

① $(\sqrt{٢} + ٢)(\sqrt{٣} + ٣) = \sqrt{٢} \times \sqrt{٣} + \sqrt{٢} \times ٣ + ٢ \times \sqrt{٣} + ٢ \times ٣$

$= \sqrt{٦} + ٣\sqrt{٢} + ٢\sqrt{٣} + ٦$

② $(\sqrt{٥} - ٢)(\sqrt{٥} + ٢) = \sqrt{٥} \times \sqrt{٥} + \sqrt{٥} \times ٢ - ٢ \times \sqrt{٥} - ٢ \times ٢$

$= ٥ + ٢\sqrt{٥} - ٢\sqrt{٥} - ٤ = ١$

③ $(\sqrt{٣} - ١)^٢ = \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} - \sqrt{٣} \times ١ \times ٢ + ١ \times ١$

$= ٣ - ٢\sqrt{٣} + ١ = ٤ - ٢\sqrt{٣}$

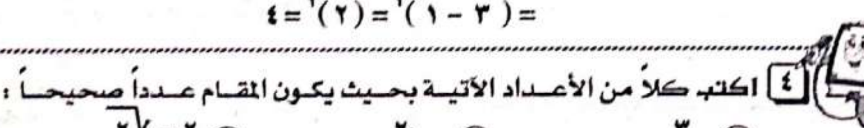


مثال ٣ أوجد ناتج $(\sqrt{٣} - ١)^٢ (\sqrt{٣} + ١)^٢$

الحل

$(\sqrt{٣} - ١)^٢ (\sqrt{٣} + ١)^٢ = [(\sqrt{٣} - ١)(\sqrt{٣} + ١)]^٢$

$= (٣ - ١)^٢ = (٢)^٢ = ٤$



مثال ٤ اكتب كلاً من الأعداد الآتية بحيث يكون المقام عدداً صحيحاً :

① $\frac{٣}{\sqrt{٣}}$ ② $\frac{٢٠}{٢\sqrt{٥}}$ ③ $\frac{٢ - \sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

الحل

لاحظ أن المحايد الضربى ١ يمكن كتابته بالصورة $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ أو $\frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}}$ أو $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

① $\frac{٣}{\sqrt{٣}} = \frac{٣}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٣} = \sqrt{٣}$

② $\frac{٢٠}{٢\sqrt{٥}} = \frac{٢٠}{٢\sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = \frac{٢٠\sqrt{٥}}{٢ \times ٥} = ٢\sqrt{٥}$

③ $\frac{٢ - \sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{٢ - \sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{٢\sqrt{٢} - ٢}{٢} = \frac{٢(\sqrt{٢} - ١)}{٢} = \sqrt{٢} - ١$



مثال ٥ أعط تقديراً لناتج $(٣ + \sqrt{٥}) \times (١ + \sqrt{٨})$ وتحقق من صحة إجابتك باستخدام الآلة الحاسبة :

الحل

تقدير $\sqrt{٥}$ هو ٢ ∴ $(٣ + \sqrt{٥})$ تقديرها هو ٣ + ٢ = ٥

تقدير $\sqrt{٨}$ هو ٣ ∴ $(١ + \sqrt{٨})$ تقديرها هو ١ + ٣ = ٤

∴ $(٣ + \sqrt{٥})(١ + \sqrt{٨})$ تقديرها هو ٥ × ٤ = ٢٠

باستخدام الآلة الحاسبة للتحقق من صحة الإجابة نجد أن الناتج ٢٠,٠٤٥٩

أي أن التقدير مقبول



تدريب (١)

أكمل لإيجاد ناتج ما يأتي :

① $\sqrt{٣} + \sqrt{٣} = ...$ ② $٤\sqrt{٢} - ٢\sqrt{٢} = ...$

③ $\sqrt{٢} \times \sqrt{٢} = ...$ ④ $٢\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = ...$

⑤ $\sqrt{٢} + ٣ + ٣\sqrt{٢} - ١ = ... + ...$



تدريب (٢)

أوجد مفكوك كل مما يأتي :

① $\sqrt{٢}\,(\sqrt{٢} + ٢\sqrt{٣}) = ... + ...\sqrt{....}$

② $(\sqrt{٢} + ١)(\sqrt{٢} + ٢) = ٢ + ... + ٢ = ...$

③ $(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})(٢\sqrt{٣} - ٣\sqrt{٢}) = ... = ... - ٥\sqrt{٦}$

④ $(٢\sqrt{٣} + ٢)^٢ - ١٢ = ... + ... + ... - ١٢$

$= .... + ...\sqrt{....}$





تمارين (٥) على العمليات على الأعداد الحقيقية

أسئلة الوزارة

أولاً : راجع معنا واختبر نفسك ١٠ — $\frac{١}{٣}$ ساعة امتحان ومراجعة

اختبار تراكمي (٣)

١ (أ) إذا كانت س =]-∞ ، ١[، ص = [-١ ، ٣] فأكمل ما يأتي :

① س ∪ ص = ... ② س ∩ ص = ...

③ س - ص = ... ④ سَ = ...

٤ درجات

(ب) ① أوجد مجموعة حل المعادلة $(٢س - ١)^٣ - ١٤ = ٥٠$ في ح

....

② أثبت أن $\sqrt{٣}$ ينحصر بين ١,٧ ، ١,٨

....

٣ درجات

(جـ) ① حدد النقطة التي تمثل العدد $١ + \sqrt{٧}$ على خط الأعداد

....

② أوجد على صورة فترة مستعيناً بخط الأعداد [-١ ، ٣] - [١ ، ٤]

....

٣ درجات



ثانياً : أجب عما يأتى :

مسائل المستوى الأول

(٢) أكمل ما يأتى :

① $\sqrt{٢} + ٥ = ٥ + \dots\dots$

② $\sqrt{١١} + (-\sqrt{١١}) = \dots\dots$

③ $٧ + \sqrt{٣} = ٥ + (\dots\dots + \dots\dots)$

④ $\sqrt{٧} \times \sqrt{٧} = \dots\dots$

⑤ $٧ + \sqrt{٥} - ٣ = \dots\dots$

⑥ $٢\sqrt{٥} \times ٣\sqrt{٥} = \dots\dots$

⑦ $(٤ + \sqrt{٧}) + (٣ - \sqrt{٧}) = \dots\dots$

⑧ $\sqrt{٢} + \sqrt{٢} + \sqrt{٢} = \dots\dots \times \sqrt{٢} = \dots\dots$

⑨ المعكوس الجمعى للعدد $\sqrt[٣]{٨}$ هو ....

⑩ المعكوس الجمعى للعدد $١ - \sqrt{٢}$ هو ....

⑪ المحايد الضربى فى ح هو ....

⑫ المعكوس الضربى للعدد $\frac{-٣}{\sqrt{٢}}$ هو ....

(٣) اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

① $٢\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٣} = \dots\dots$ [$٥\sqrt{٦}$ ، $٥\sqrt{٣}$ ، $٦\sqrt{٣}$ ، $٥\sqrt[٣]{٣}$]

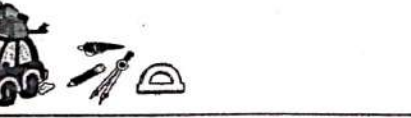
② $\sqrt[٣]{٥} + \sqrt[٣]{٥} = \dots\dots$ [$\sqrt[٣]{١٠}$ ، ٥ ، $٢\sqrt[٣]{٥}$ ، $٥\sqrt[٣]{٥}$]

③ $٥ + ٧\sqrt{٢} - ٤ + \sqrt{٢} = \dots\dots$ [١٥ ، $١ + ٧\sqrt{٢}$ ، $١ + ٨\sqrt{٢}$ ، $١ + ٦\sqrt{٢}$]

④ $-٢\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = \dots\dots$ [-٦ ، $-٢\sqrt{٣}$ ، $٢\sqrt{٣}$ ، ٦]

⑤ $\frac{٦}{\sqrt{٣}} = \dots\dots$ [$\sqrt{٢}$ ، ٢ ، $٢\sqrt{٣}$ ، $٦\sqrt{٣}$]

⑥ $(٢\sqrt[٣]{٥})^{٣} = \dots\dots$ [١٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، $٨\sqrt[٣]{٥}$]



⑦ المعكوس الجمعى للعدد $(\sqrt{٢} - \sqrt{٣})$ هو .... [$\sqrt{٢} + \sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣} - \sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٢} - \sqrt{٣}$ ، $-\sqrt{٢} - \sqrt{٣}$]

⑧ $(\sqrt{٥} + ٣\sqrt{٥}) \div \sqrt{٥} = \dots\dots$ [$٣\sqrt{٥}$ ، ٣ ، ٥ ، ٤]

(٤) ضع كلاً مما يأتى فى أبسط صورة :

① $\sqrt{٢} + ٢\sqrt{٢}$

② $٢\sqrt{٥} + ٦\sqrt{٥}$

③ $٢\sqrt{٧} - ٥\sqrt{٧}$

④ $٣\sqrt{٥} - ٤\sqrt{٥} + \sqrt{٥}$

⑤ $٤\sqrt{٣} - ٧\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٣}$

⑥ $٤\sqrt{٥} - ٢\sqrt{٥} + ٥\sqrt{٥} - \sqrt{٥}$

⑦ $٢\sqrt[٣]{٢} - ٦\sqrt[٣]{٢} + ٣\sqrt[٣]{٢}$

⑧ $\frac{١}{٣}\sqrt{٦} + \sqrt{٦} + \frac{٢}{٣}\sqrt{٦}$

مسائل المستوى الثانى

(٥) ضع كل مما يأتى فى أبسط صورة :

① $٣ + ٣\sqrt{٢} - ٢ - ٦\sqrt{٢}$

② $٢\sqrt{٧} - ٣\sqrt{٢} + \sqrt{٧} + ٥\sqrt{٧}$

③ $٢\sqrt{٣} + \sqrt{٢} + ٤\sqrt{٣} - ٥\sqrt{٢}$

④ $\sqrt{٧} + \sqrt{٢} - (-\sqrt{٧}) + ٣\sqrt{٢}$

⑤ $٢\sqrt{٢} - ٣\sqrt[٣]{٢} + ٥\sqrt{٢} + \sqrt[٣]{٢}$

⑥ $\frac{٢}{٧} + \frac{١}{٥}\sqrt{٢} + \frac{٣}{٧} + \frac{٤}{٥}\sqrt{٢}$

(٦) ضع كلاً مما يأتى فى أبسط صورة :

① $\sqrt{٥} \times \sqrt{٥}$

② $٤ \times ٢\sqrt{٣}$

③ $٢\sqrt{٦} \times \sqrt{٦}$

④ $٢\sqrt{٧} \times ٣\sqrt{٧}$

⑤ $٣\sqrt{٥} \times (-\sqrt{٥})$

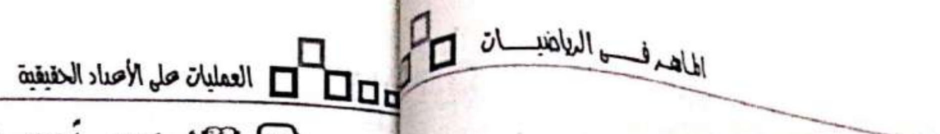
⑥ $\frac{١}{٢}\sqrt{٢} \times ٢\sqrt{٢}$

⑦ $\sqrt{٢} \times \sqrt{٢} + ٣$

⑧ $\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} \times \frac{١}{\sqrt{٣}}$

⑨ $\sqrt{٢} \times ٢\sqrt{٥} \times \sqrt{٢}$

⑩ $\frac{\sqrt{٢}}{٢} \times \frac{٢\sqrt{٧}}{\sqrt{١٠}} \times \frac{٥\sqrt{٢}}{\sqrt{٧}}$





(٧) ضع كلاً مما يأتى فى ابسط صورة :

① $\sqrt{٢}(٥+\sqrt{٢})$
② $٢(\sqrt{٣}+٢\sqrt{٥})$
③ $\sqrt{٥}(\sqrt{٥}+\sqrt{٢})$
④ $\sqrt{٣}(٢\sqrt{٣}+٤)$
⑤ $\sqrt{٣}(\sqrt{٥}+٣\sqrt{٣})$
⑥ $٢\sqrt{٧}(٣\sqrt{٧}+٤)$
⑦ $-٢(٣+٥\sqrt{٣})+٨\sqrt{٣}$
⑧ $\sqrt{٢}(\frac{٣}{\sqrt{٢}}-٣\sqrt{٢})+٧$
⑨ $(\sqrt{٢}+١)(\sqrt{٢}-١)$
⑩ $(\sqrt{٣}+٢)(\sqrt{٣}+٣)$
⑪ $(٤+٢\sqrt{٢})(٣+\sqrt{٢})$
⑫ $(\sqrt{٢}+٢)(\sqrt{٢}+٢)$
⑬ $(٣\sqrt{٢}-٣)(\sqrt{٢}+٢)$
⑭ $(\sqrt{٢}+١)^٢$
⑮ $(\sqrt{٣}-٢)^٢$
⑯ $(٢\sqrt{٢}-٣)^٢$
⑰ $(\sqrt{٣}+١)(\sqrt{٣}+٢)^٢$
⑱ $(\sqrt{٥}-٢)^٢(\sqrt{٥}+٢)^٢$
⑲ $(٢-\sqrt{٥})^٢-٧$
⑳ $(١-\sqrt{٢})^٣$

(٨) اكتب كلاً من الأعداد الآتية بحيث يكون المقام عدداً صحيحاً موجباً :

① $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$
② $\frac{٣}{٢\sqrt{٣}}$
③ $\frac{٨}{\sqrt{٢}}$
④ $\frac{١٢}{٢\sqrt{٦}}$
⑤ $\frac{١٥}{٣\sqrt{٥}}$
⑥ $\frac{٦-\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$

(٩) إذا كانت أ = $\sqrt{٣}+٢$ ، ب = $\sqrt{٣}-٢$ أوجد قيمة كل من :

① أ + ب
② أ − ب
③ أ ب

(١٠) إذا كانت س = $\sqrt{٢}-١$ ، ص = $\sqrt{٢}+١$ فأوجد قيمة كل من :

① س + ص
② س − ص
③ س ص
④ $س^٢ + ص^٢$
⑤ $س^٢ + ٢س ص + ص^٢$
⑥ $س^٢ - ٢س ص + ص^٢$

(١١) أعط تقديراً لناتج $(٣+\sqrt{٥})\times(١+\sqrt{٨})$ و تحقق من صحة اجابتك باستخدام الآلة الحاسبة

(١٢) إذا كانت س = $\sqrt{١٥}+٢$ ، ص = $٤-\sqrt[٣]{٢٥}$ قدر قيمة كل من :

① س ، ص
② س × ص
③ س + ص

اختبر صحة تقديرك باستخدام الآلة الحاسبة

وأوجد الفرق بين تقديرك و الإجابة الصحيحة

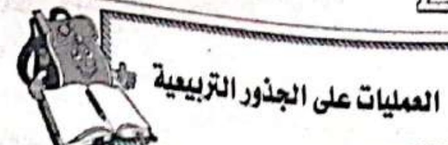
مسائل المتفوقين

(١٣) إذا كان $\frac{(٢\sqrt{٣}-٣)^٥}{(٣-٢\sqrt{٣})^٤} = أ\sqrt{٣}-ب$ فأوجد قيمة أ ، ب [أ=٢ ، ب=٣]

(١٤) إذا كان س ص = ١ فإن $(\frac{١}{س}+س)(ص-\frac{١}{ص})$ يساوى أياً مما يأتى :

[٢س أ، ٢ص أ، $س^٢-ص^٢$ أ، $ص^٢-س^٢$]





العمليات على الجذور التربيعية

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين غير سالبين فإن :

(١) $\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} = \sqrt{أب}$

فمثلاً :

$\sqrt{٢} \times \sqrt{٣} = \sqrt{٦}$

$\sqrt{٣} \times \sqrt{١٢} = \sqrt{٣٦} = ٦$

(٢) $\sqrt{أ \times ب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب}$

فمثلاً :

$\sqrt{٢٠} = \sqrt{٤ \times ٥} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٥} = ٢\sqrt{٥}$

$\sqrt{١٨} = \sqrt{٩ \times ٢} = \sqrt{٩} \times \sqrt{٢} = ٣\sqrt{٢}$

(٣) $\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$ ، $ب \neq ٠$

فمثلاً :

$\sqrt{\frac{٢}{٩}} = \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٩}} = \frac{\sqrt{٢}}{٣}$

(٤) $\frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} = \sqrt{\frac{أ}{ب}}$ ، $ب \neq ٠$

فمثلاً :

$\frac{\sqrt{٥٠}}{\sqrt{٢}} = \sqrt{\frac{٥٠}{٢}} = \sqrt{٢٥} = ٥$

(٥) $\frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} \times \frac{\sqrt{ب}}{\sqrt{ب}} = \frac{\sqrt{أب}}{ب}$ ، $ب \neq ٠$

وتستخدم هذه القاعدة لجعل المقام عدداً نسبياً

فمثلاً :

$\frac{\sqrt{١٨}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{١٨}}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣٦}}{٢} = \frac{٦}{٢} = ٣$

$\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٢ \times ٣}}{٣} = \frac{١}{٣}\sqrt{٦}$

ملاحظة

• $\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}} \neq أ + ب$ ، $\sqrt{أ^{٢} - ب^{٢}} \neq أ - ب$

العددان المترافقان

إذا كان أ ، ب عددين نسبيين موجبين :

فإن كل من العددين $(\sqrt{أ} + \sqrt{ب})$ ، $(\sqrt{أ} - \sqrt{ب})$ يعتبر مرافقاً للعدد الآخر وهما يختلفان فى الإشارة بينهما وحاصل ضربهما دائماً عدد نسبى

أمثلة توضيحية

مثال ١ اختصر المقدار $\sqrt{٥٠} + \sqrt{٨} - \sqrt{٣٢}$ بعد وضع كل حد من حدوده على صورة $أ\sqrt{ب}$

الحل

$\because \sqrt{٥٠} = \sqrt{٢٥ \times ٢} = \sqrt{٢٥} \times \sqrt{٢} = ٥\sqrt{٢}$

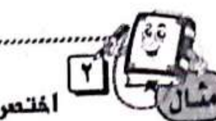
، $\sqrt{٨} = \sqrt{٤ \times ٢} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٢} = ٢\sqrt{٢}$

، $\sqrt{٣٢} = \sqrt{١٦ \times ٢} = \sqrt{١٦} \times \sqrt{٢} = ٤\sqrt{٢}$

$\therefore \sqrt{٥٠} + \sqrt{٨} - \sqrt{٣٢} = ٥\sqrt{٢} + ٢\sqrt{٢} - ٤\sqrt{٢}$

$= ٣\sqrt{٢}$

لاحظ إننا نحول كل عدد إلى حاصل ضرب عددين أحدهما يمكن إيجاد جذره التربيعي



مثال ٢ اختصر المقدار $٦\sqrt{\frac{٢}{٣}} + ٤\sqrt{\frac{٣}{٢}} - ١٢\sqrt{\frac{١}{٦}}$

الحل

$٦\sqrt{\frac{٢}{٣}} = ٦\sqrt{\frac{٢}{٣}} \times \sqrt{\frac{٣}{٣}} = ٦ \times \frac{١}{٣}\sqrt{٦} = ٢\sqrt{٦}$

$٤\sqrt{\frac{٣}{٢}} = ٤\sqrt{\frac{٣}{٢}} \times \sqrt{\frac{٢}{٢}} = ٤ \times \frac{١}{٢}\sqrt{٦} = ٢\sqrt{٦}$

$١٢\sqrt{\frac{١}{٦}} = ١٢\sqrt{\frac{١}{٦}} \times \sqrt{\frac{٦}{٦}} = ١٢ \times \frac{١}{٦}\sqrt{٦} = ٢\sqrt{٦}$

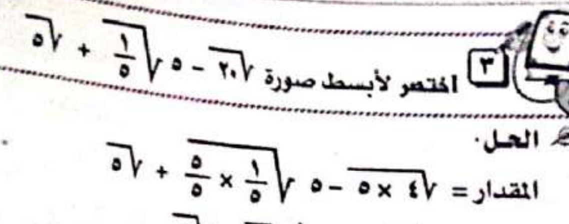
$\therefore$ المقدار $= ٢\sqrt{٦} + ٢\sqrt{٦} - ٢\sqrt{٦}$

$= ٢\sqrt{٦}$

لاحظ أنه للتخلص من المقام نضرب بسط و مقام الكسر فى نفس عدد المقام







مثال ٣ اختصر لأبسط صورة $\sqrt{٢٠} - ٥\sqrt{\frac{١}{٥}} + \sqrt{٥}$

الحل:

المقدار $= \sqrt{٤ \times ٥} - ٥\sqrt{\frac{١}{٥} \times \frac{٥}{٥}} + \sqrt{٥}$

$= ٢\sqrt{٥} - ٥ \times \frac{١}{٥}\sqrt{٥} + \sqrt{٥}$

$= ٢\sqrt{٥} - \sqrt{٥} + \sqrt{٥} = ٢\sqrt{٥}$

مثال ٤ أوجد ناتج :

① $\sqrt{٣}\,(\sqrt{٣} - \sqrt{٧})$ ② $٢\sqrt{٢}\,(\sqrt{٨} - ٣\sqrt{٣})$

③ $(\sqrt{٥} - \sqrt{٣})(\sqrt{٥} - \sqrt{٣})$ ④ $(٣ - \sqrt{٢})(٣ + \sqrt{٢})$

⑤ $(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})^٢$

الحل

① $\sqrt{٣}\,(\sqrt{٣} - \sqrt{٧}) = \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} - \sqrt{٣} \times \sqrt{٧}$

$= ٣ - \sqrt{٢١}$

② $٢\sqrt{٢}\,(\sqrt{٨} - ٣\sqrt{٣}) = ٢\sqrt{٢}\,(\sqrt{٤ \times ٢} - ٣\sqrt{٣})$

$= ٢\sqrt{٢}\,(٢\sqrt{٢} - ٣\sqrt{٣})$

$= ٢\sqrt{٢} \times ٢\sqrt{٢} - ٢\sqrt{٢} \times ٣\sqrt{٣}$

$= ٤ \times \sqrt{٤} - ٦ \times \sqrt{٦}$

$= ٤ \times ٢ - ٦ \times \sqrt{٦} = ٨ - ٦\sqrt{٦}$

③ $(\sqrt{٥} - \sqrt{٣})(\sqrt{٥} - \sqrt{٣}) = \sqrt{٥} \times \sqrt{٥} - \sqrt{٥} \times \sqrt{٣} - \sqrt{٣} \times \sqrt{٥} + \sqrt{٣} \times \sqrt{٣}$

$= ٥ - \sqrt{١٥} - \sqrt{١٥} + ٣$

$= ٨ - ٢\sqrt{١٥}$

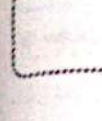
④ $(٣ - \sqrt{٢})(٣ + \sqrt{٢}) = ٣ \times ٣ + ٣ \times \sqrt{٢} - \sqrt{٢} \times ٣ - \sqrt{٢} \times \sqrt{٢}$

$= ٩ + ٣\sqrt{٢} - ٣\sqrt{٢} - ٢ = ٧$

⑤ $(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})^٢ = \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} + \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} - ٢ \times \sqrt{٣} \times \sqrt{٢}$

$= ٣ + ٢ - ٢\sqrt{٦} = ٥ - ٢\sqrt{٦}$





مثال ٥ اكتب كلاً مما يأتى بحيث يكون المقام عدداً نسبياً :

① $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ② $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٥}}$ ③ $\frac{٣}{\sqrt{٥} - \sqrt{٢}}$ ④ $\frac{\sqrt{٢} + ١}{\sqrt{٢} - ١}$

الحل

① $\frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{١}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٣} = \frac{١}{٣}\sqrt{٣}$

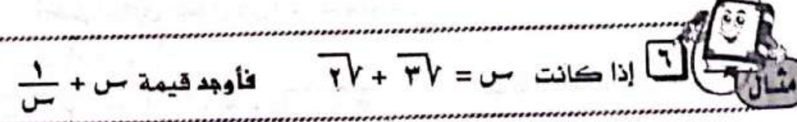
② $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٥}} = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = \frac{\sqrt{١٥}}{٥} = \frac{١}{٥}\sqrt{١٥}$

③ $\frac{٣}{\sqrt{٥} - \sqrt{٢}} = \frac{٣}{\sqrt{٥} - \sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٥} + \sqrt{٢}}{\sqrt{٥} + \sqrt{٢}}$

$= \frac{٣(\sqrt{٥} + \sqrt{٢})}{٥ - ٢} = \sqrt{٥} + \sqrt{٢}$

④ $\frac{\sqrt{٢} + ١}{\sqrt{٢} - ١} = \frac{\sqrt{٢} + ١}{\sqrt{٢} - ١} \times \frac{\sqrt{٢} + ١}{\sqrt{٢} + ١} = \frac{(\sqrt{٢} + ١)(\sqrt{٢} + ١)}{٢ - ١}$

$= \frac{٢ + ١ + ٢\sqrt{٢}}{١} = ٣ + ٢\sqrt{٢}$



مثال ٦ إذا كانت $س = \sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ فأوجد قيمة $س + \frac{١}{س}$

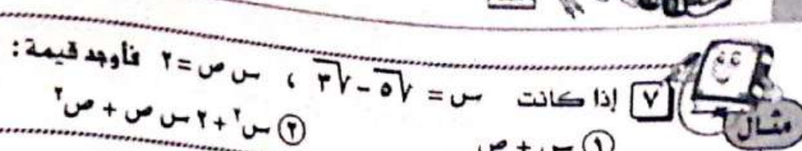
الحل

$\frac{١}{س} = \frac{١}{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}}{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}}$

$= \frac{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}}{٣ - ٢} = \sqrt{٣} - \sqrt{٢}$

$\therefore$ $س + \frac{١}{س} = \sqrt{٣} + \sqrt{٢} + \sqrt{٣} - \sqrt{٢} = ٢\sqrt{٣}$





مثال (٧) إذا كانت $س = \sqrt{٥} - \sqrt{٣}$ ، $س ص = ٢$ فأوجد قيمة :

(١) $س + ص$ (٢) $س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}$

الحل

$\because س ص = ٢$ $\therefore ص = \frac{٢}{س}$

$\therefore ص = \frac{٢}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}} = \frac{٢}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٥} + \sqrt{٣}}{\sqrt{٥} + \sqrt{٣}} = \frac{٢(\sqrt{٥} + \sqrt{٣})}{(٥ - ٣)} = \sqrt{٥} + \sqrt{٣}$

(١) $س + ص = \sqrt{٥} - \sqrt{٣} + \sqrt{٥} + \sqrt{٣} = ٢\sqrt{٥}$

(٢) $س^{٢} = (\sqrt{٥} - \sqrt{٣})^{٢} = ٥ + ٣ - ٢\sqrt{١٥} = ٨ - ٢\sqrt{١٥}$

$ص^{٢} = (\sqrt{٥} + \sqrt{٣})^{٢} = ٥ + ٣ + ٢\sqrt{١٥} = ٨ + ٢\sqrt{١٥}$

$س ص = (\sqrt{٥} - \sqrt{٣})(\sqrt{٥} + \sqrt{٣}) = ٥ - ٣ = ٢$

$\therefore س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} = ٨ - ٢\sqrt{١٥} + ٢ \times ٢ + ٨ + ٢\sqrt{١٥} = ٢٠$

حل آخر :

$س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} = (س + ص)^{٢} = (٢\sqrt{٥})^{٢} = ٤ \times ٥ = ٢٠$

أمثلة للتدريب

تدريب (١)

أكمل ليكون المقدار فى أبسط صورة :

(١) $\sqrt{٧٥} - ٢\sqrt{٢٧} + \sqrt{١٢}$

$= \sqrt{... \times ٣} - ٢\sqrt{... \times ٣} + \sqrt{... \times ٣}$ (نحلل العدد داخل الجذر إلى عددين أحدهما يمكن إيجاد جذره)

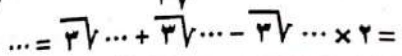
$= ...\sqrt{٣} - ٢ \times ...\sqrt{٣} + ...\sqrt{٣}$

$= ...\sqrt{٣} - ...\sqrt{٣} + ...\sqrt{٣} = ...$

(٢) $٢\sqrt{٢٧} - \frac{١٥}{\sqrt{٣}} + ٦\sqrt{\frac{١}{٣}}$

$= ٢ \times \sqrt{... \times ...} - \frac{١٥}{\sqrt{٣}} \times ...... + ٦\sqrt{\frac{١}{٣} \times ....}$ (نضرب فى مرافق المقام)

$= ٢ \times ...\sqrt{٣} - ...\sqrt{٣} + ...\sqrt{٣} = ...$





تدريب (٢)

إذا كان $س = \frac{١}{٢ - \sqrt{٣}}$ ، $ص = ٢ - \sqrt{٣}$

أكمل لإيجاد قيمة كل من $س + ص$ ، $س - ص$ ، $س ص$ ، $س^{٢}$

الحل

$س = \frac{١}{٢ - \sqrt{٣}} \times \frac{.........}{.........} = \frac{٢ + \sqrt{٣}}{.........} = ...$ (نضرب فى مرافق المقام)

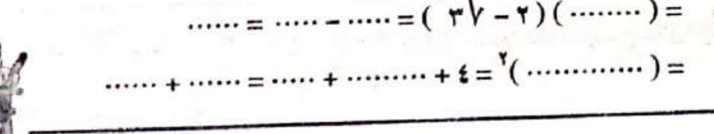
$س + ص = ... + ٢ - \sqrt{٣} = ...$

$س - ص = ... - (............)$

$= .... - .... = ...$

$س ص = (........)(٢ - \sqrt{٣}) = ... - ..... = ...$

$س^{٢} = (............)^{٢} = ٤ + ... + ... = ... + ...$



تدريب (٣)

إذا كانت $س = \sqrt{٥} - ٢$ ، $س ص = ١$

فأوجد قيمة $ص^{٢}$ ، $س^{٢} - ص^{٢}$ ، $س^{٢} - ٢ س ص + ص^{٢}$

الحل

$ص = \frac{١}{س} = \frac{١}{......} \times \frac{......}{......} = \frac{......}{......} = ...$

$ص^{٢} = (\sqrt{٥} + ...)^{٢} = ٥ + ...\sqrt{...} + ... = ... + ...\sqrt{...}$

$س^{٢} - ص^{٢} = (س + ص)(س - ص)$

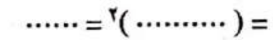
$= (\sqrt{٥} - ٢ + ...)(\sqrt{٥} - ٢ - ....)$

$= ...... \times ...... = ...$

$س^{٢} - ٢ س ص + ص^{٢} = (س - ص)^{٢} = (\sqrt{٥} - ٢ - ....)^{٢}$

$= (..........)^{٢} = ...$







ثانياً : أجب عما يأتي :

مسائل المستوى الأول

٢ اختصر كلاً مما يأتي :

① [illegible] ② [illegible]
③ [illegible] ④ [illegible]
⑤ [illegible] ⑥ [illegible]
⑦ [illegible] ⑧ [illegible]

٣ اختصر كلاً مما يأتي :

① [illegible] ② [illegible] ③ [illegible]
④ [illegible] ⑤ [illegible] ⑥ [illegible]
⑦ [illegible] ⑧ [illegible] ⑨ [illegible]
⑩ [illegible] ⑪ [illegible] ⑫ [illegible]

٤ ضع كلاً مما يأتي على الصورة أ√ب [illegible]

① [illegible] ② [illegible] ③ [illegible]
④ [illegible] ⑤ [illegible] ⑥ [illegible]

٥ اختصر لأبسط صورة :

① [illegible] ② [illegible]
③ [illegible] ④ [illegible]
⑤ [illegible] ⑥ [illegible]

تمارين (٦) على العمليات على الجذور التربيعية

ورقة - راجع بعناية واختبر نفسك

١ (أ) اختصر ما يأتي لأبسط صورة :

① [illegible] = ...
② [illegible] = ...
③ [illegible] = ...
④ [illegible] = ...

(ب) ① اوجد [illegible] مع التوضيح على خط الأعداد

....

② اوجد مجموعة حل المتباينة [illegible]

....

(جـ) ① اوجد [illegible]

....

② عين النقطة التي تمثل العدد [illegible] على خط الأعداد

....



مسائل المستوى الثانى

٦ اختصر لأبسط صورة :

① $13\sqrt{2} - 5\sqrt{8} + 4\sqrt{\frac{1}{2}}$ [$5\sqrt{2}$]

② $\frac{3}{5}\sqrt{20} + \sqrt{125} - \frac{1}{\sqrt{5}}$ [$6\sqrt{5}$]

③ $\sqrt{45} + \frac{1}{2}\sqrt{20} - 5\sqrt{\frac{1}{5}}$ [$3\sqrt{5}$]

④ $2\sqrt{6} - 3\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{54}$ [$4\sqrt{6}$]

⑤ $2\sqrt{32} + \sqrt{18} - 8\sqrt{\frac{1}{2}}$ [$7\sqrt{2}$]

⑥ $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{98}$ [$10\sqrt{2}$]

⑦ $2\sqrt{75} + 4\sqrt{12} - 9\sqrt{\frac{1}{3}}$ [$15\sqrt{3}$]

⑧ $6\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{6} + \frac{1}{2}\sqrt{96}$ [صفر]

⑨ $2\sqrt{50} - 3\sqrt{2} - 4\sqrt{\frac{1}{8}}$ [$6\sqrt{2}$]

⑩ $\sqrt{3} + 3\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{2} \times \sqrt{6}$ [صفر]

⑪ $\frac{1}{2}\sqrt{28} - 2\sqrt{63} + 14\sqrt{\frac{1}{7}}$ [$-3\sqrt{7}$]

⑫ $12\sqrt{\frac{1}{6}} + 6\sqrt{\frac{2}{3}} - 8\sqrt{\frac{3}{2}}$ [صفر]

٧ أوجد ناتج كل مما يأتى :

① $\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{5})$

② $\sqrt{7}\left(\frac{4}{\sqrt{7}} + 7\right)$

③ $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

④ $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)$



⑤ $(3 + \sqrt{2})^2$

⑥ $(\sqrt{6} + \sqrt{3})^2$

⑦ $(2\sqrt{3} - 3)(2\sqrt{3} + 4)$

⑧ $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

⑨ $2\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

⑩ $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(\sqrt{12} + \sqrt{18})$

٨ اكتب كلاً من الأعداد الآتية بحيث يكون المقام عدداً صحيحاً :

① $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ② $\frac{10}{\sqrt{5}}$ ③ $\frac{5}{2\sqrt{3}}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

⑤ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$ ⑥ $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ ⑦ $\frac{5}{3\sqrt{5}}$ ⑧ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

٩ اكتب كلاً من الأعداد الآتية بحيث يكون المقام عدداً صحيحاً :

① $\frac{2}{\sqrt{3} + 1}$ ② $\frac{4}{3 - \sqrt{5}}$ ③ $\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ ④ $\frac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

⑤ $3 + \frac{5}{\sqrt{5}}$ ⑥ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$ ⑦ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$ ⑧ $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$

١٠ أوجد قيمة كلاً من س + ص ، س × ص فى الحالات الآتية :

① س $= 3 + \sqrt{5}$ ، ص $= 1 - \sqrt{5}$

② س $= \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ، ص $= \sqrt{3} + \sqrt{2}$

③ س $= 5 - 3\sqrt{2}$ ، ص $= 5 + 3\sqrt{2}$

١١ إذا كان أ $= \sqrt{5} - \sqrt{3}$ ، ب $= \sqrt{5} + \sqrt{3}$

فأوجد قيمة كلاً من أ + ب ، أ − ب [$2\sqrt{5}$ ، $-2\sqrt{3}$]

١٢ إذا كان س $= \sqrt{3} - 1$ ، ص $= \sqrt{3} + 1$

فأوجد قيمة كلاً من س ص ، س^2 ، س − ص [2 ، $4 - 2\sqrt{3}$ ، -2]



(١٣) إذا كان $س = ٢ + \sqrt{٣}$ ، $ص = ٢ - \sqrt{٣}$ فأوجد قيمة $\frac{س + ص}{س ص}$ [٤]

(١٤) إذا كان $س = ٢ - \sqrt{٢}$ ، $ص = ٢ + \sqrt{٢}$ اثبت أن $س + ص = (س ص)^٢$

(١٥) إذا كان $س = \frac{٢}{\sqrt{٥} + \sqrt{٣}}$ ، $ص = \frac{٢}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}}$

فأوجد قيمة كل من $س^٢ ص^٢$ ، $س^٢ - ص^٢$ [٤ ، $-٤\sqrt{١٥}$]

(١٦) إذا كان $س = \sqrt{٥} + \sqrt{٢}$ ، $ص = \sqrt{٥} - \sqrt{٢}$ فأوجد قيمة $\frac{س + ص}{س ص - ١}$ [$\sqrt{٥}$]

(١٧) إذا كان $أ = \sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ ، $ب = \sqrt{٣} - \sqrt{٢}$

اثبت أن كلاً من أ ، ب معكوس ضربي للآخر

(١٨) إذا كانت $س = \sqrt{٧} + \sqrt{٥}$ ، $ص = \frac{٢}{س}$ فأوجد في أبسط صورة قيمة $\frac{س + ص}{س ص}$ [$\sqrt{٧}$]

(١٩) إذا كانت $س = \sqrt{٣} - \sqrt{٢}$ ، $ص = \sqrt{٣} + \sqrt{٢}$

① أوجد قيمة $\frac{٣ س ص}{س + ص}$ [$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$]

② أوجد قيمة $س^٢ + ٢ س ص + ص^٢$ [١٢]

(٢٠) إذا كانت $س = \frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ ، $ص = \frac{٤}{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}}$

أوجد قيمة كل من : ① $س^٢ ص^٢$ ② $\frac{س - ص}{س ص}$ [١٦ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$]

(٢١) إذا كانت $س = \frac{١}{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}}$ ، $ص = \sqrt{٣} - \sqrt{٢}$

أوجد قيمة كل من : ① $س^٢ ص - س ص^٢$ ② $(س - ص)^٤$ [$٢\sqrt{٢}$ ، ٦٤]



(٢٢) إذا كان $س = ٥\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٥}$ ، $ص = \sqrt{٧٥} - \sqrt{٤٥}$

أوجد قيمة كل من $س - ص$ ، $س ص$ [$٦\sqrt{٥}$ ، ٣٠]

(٢٣) إذا كان $س = ٣ + \sqrt{٥}$ ، $ص = \frac{٤}{س}$ اثبت أن س ، ص مترافقان

ثم أوجد $س^٢ + ٦ ص$ [٣٢]

(٢٤) إذا كانت $س = \sqrt{١١} - \sqrt{٥}$ ، $ص = \sqrt{١١} + \sqrt{٥}$

اثبت أن $\frac{ص - س}{\sqrt{٥}} = \frac{١}{٣} س ص$

(٢٥) إذا كانت $س = \sqrt{٣} + ١$ ، $ص = \sqrt{٣} - ١$ فأوجد قيمة $\frac{س}{ص} + \frac{ص}{س}$

[٤]

(٢٦) إذا كانت $س = \frac{٥\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}}$ ، $ص^{-١} = \frac{٢\sqrt{٥} + ٣\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

أوجد قيمة كل من : ① $س^٢ + ص^٢$ ② $س ص$

اثبت أن $س^٢ + ص^٢ = ٣٨ س ص$ [٣٨ ، ١]

(٢٧) إذا كانت $س = \frac{٢}{\sqrt{٧} - \sqrt{٥}}$ ، $ص^{-١} = \frac{١}{\sqrt{٧} - \sqrt{٥}}$

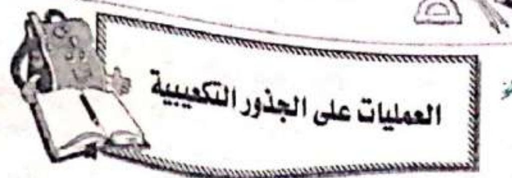
اثبت أن س ، ص مترافقان ثم أوجد قيمة $(س + ص)^٢ - س^٢ ص^٢$ [٢٤]

مسائل المتفوقين

(٢٨) أوجد مرافق العدد $\sqrt{٥٠} - \sqrt{١٨} + \sqrt{٨}$ [$٢\sqrt{٢} - ٢$]

(٢٩) اجعل مقام الكسر $\frac{\sqrt{٧} + \sqrt{٣} + ٢}{\sqrt{٧} + \sqrt{٣} - ٢}$ عدداً نسبياً [$\frac{\sqrt{٢١} + ٢\sqrt{٣}}{٢}$]





العمليات على الجذور التكعيبية

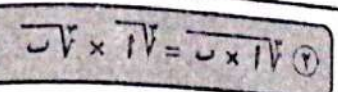
إذا كان ا ، ب عددين حقيقين فإن :

① $\sqrt[3]{ا} \times \sqrt[3]{ب} = \sqrt[3]{ا \times ب}$

فمثلاً :

$\sqrt[3]{٥} \times \sqrt[3]{٢} = \sqrt[3]{٥ \times ٢} = \sqrt[3]{١٠}$

$\sqrt[3]{٤} \times \sqrt[3]{٢} = \sqrt[3]{٤ \times ٢} = \sqrt[3]{٨} = ٢$



② $\sqrt[3]{ا \times ب} = \sqrt[3]{ا} \times \sqrt[3]{ب}$

فمثلاً :

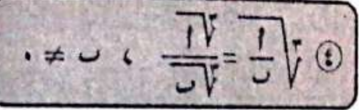
$\sqrt[3]{٤٠} = \sqrt[3]{٨ \times ٥} = \sqrt[3]{٨} \times \sqrt[3]{٥} = ٢\sqrt[3]{٥}$

$\sqrt[3]{٥٤} = \sqrt[3]{٢٧ \times ٢} = \sqrt[3]{٢٧} \times \sqrt[3]{٢} = ٣\sqrt[3]{٢}$

③ $\frac{\sqrt[3]{ا}}{\sqrt[3]{ب}} = \sqrt[3]{\frac{ا}{ب}}$ ، ب $\neq ٠$

فمثلاً :

$\frac{\sqrt[3]{١٦}}{\sqrt[3]{٢}} = \sqrt[3]{\frac{١٦}{٢}} = \sqrt[3]{٨} = ٢$



④ $\sqrt[3]{\frac{ا}{ب}} = \frac{\sqrt[3]{ا}}{\sqrt[3]{ب}}$ ، ب $\neq ٠$

فمثلاً :

$\sqrt[3]{\frac{٣}{٢}} = \frac{\sqrt[3]{٣}}{\sqrt[3]{٢}}$

لاحظ أن :

$$\frac{\sqrt[3]{ا}}{\sqrt[3]{ب^٢}} = \frac{\sqrt[3]{ا}}{\sqrt[3]{ب^٢}} \times \frac{\sqrt[3]{ب}}{\sqrt[3]{ب}} = \frac{\sqrt[3]{اب}}{\sqrt[3]{ب^٣}} = \frac{\sqrt[3]{اب}}{ب}$$ ، ب $\neq ٠$

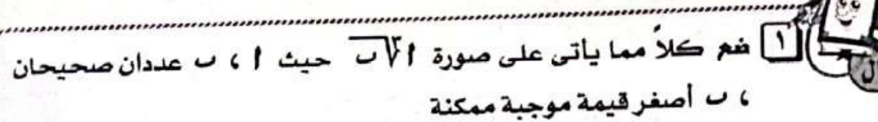
فمثلاً :

$$\sqrt[3]{\frac{٥}{٤}} = \frac{\sqrt[3]{٥}}{\sqrt[3]{٤}} \times \frac{\sqrt[3]{٢}}{\sqrt[3]{٢}} = \frac{\sqrt[3]{٥ \times ٢}}{\sqrt[3]{٨}} = \frac{\sqrt[3]{١٠}}{٢} = \frac{١}{٢}\sqrt[3]{١٠}$$





أمثلة توضيحية



مثال ١ ضع كلاً مما يأتي على صورة $ا\sqrt[3]{ب}$ حيث ا ، ب عددان صحيحان ، ب أصغر قيمة موجبة ممكنة

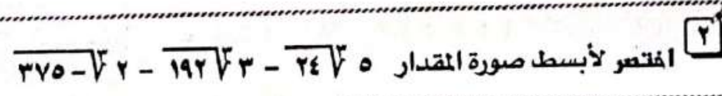
① $\sqrt[3]{١٦}$ ② $\sqrt[3]{٢٥٠}$ ③ $\sqrt[3]{١٧١٥}$

الحل

① $\sqrt[3]{١٦} = \sqrt[3]{٨ \times ٢} = \sqrt[3]{٨} \times \sqrt[3]{٢} = ٢\sqrt[3]{٢}$

② $\sqrt[3]{٢٥٠} = \sqrt[3]{١٢٥ \times ٢} = \sqrt[3]{١٢٥} \times \sqrt[3]{٢} = ٥\sqrt[3]{٢}$

③ $\sqrt[3]{١٧١٥} = \sqrt[3]{٣٤٣ \times ٥} = \sqrt[3]{٣٤٣} \times \sqrt[3]{٥} = ٧\sqrt[3]{٥}$



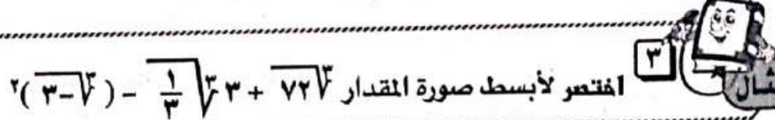
مثال ٢ اختصر لأبسط صورة المقدار $٥\sqrt[3]{٢٤} - ٣\sqrt[3]{١٩٢} - ٢\sqrt[3]{-٣٧٥}$

الحل

المقدار $= ٥\sqrt[3]{٨ \times ٣} - ٣\sqrt[3]{٦٤ \times ٣} - ٢\sqrt[3]{-١٢٥ \times ٣}$

$= ٥ \times ٢\sqrt[3]{٣} - ٣ \times ٤\sqrt[3]{٣} - ٢ \times -٥\sqrt[3]{٣}$

$= ١٠\sqrt[3]{٣} - ١٢\sqrt[3]{٣} + ١٠\sqrt[3]{٣} = ٨\sqrt[3]{٣}$



مثال ٣ اختصر لأبسط صورة المقدار $\sqrt[3]{٧٢} + ٣\sqrt[3]{\frac{١}{٣}} - (\sqrt[3]{-٣})^٢$

الحل

المقدار $= \sqrt[3]{٨ \times ٩} + ٣\sqrt[3]{\frac{١}{٣} \times \frac{٩}{٩}} - \sqrt[3]{-٣} \times \sqrt[3]{-٣}$

$= ٢\sqrt[3]{٩} + ٣ \times \frac{\sqrt[3]{٩}}{٣} - \sqrt[3]{٩}$

$= ٢\sqrt[3]{٩} + \sqrt[3]{٩} - \sqrt[3]{٩} = ٢\sqrt[3]{٩}$



مثال ٤ اختصر لأبسط صورة المقدار $\sqrt{١٨} + ٤\sqrt[٣]{\frac{١}{٢}} - \frac{\sqrt{١٠}}{\sqrt{٥}} - \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{٣٢}$

الحل

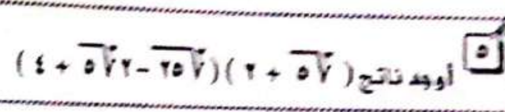
المقدار $= \sqrt{٩ \times ٢} + ٤\sqrt[٣]{\frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٤}} - \sqrt{\frac{١٠}{٥}} - \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{٨ \times ٤}$

$= ٣\sqrt{٢} + ٤ \times \frac{١}{٢}\sqrt[٣]{٤} - \sqrt{٢} - \frac{٣}{٢} \times ٢\sqrt[٣]{٤}$

$= ٣\sqrt{٢} + ٢\sqrt[٣]{٤} - \sqrt{٢} - ٣\sqrt[٣]{٤}$

$= (٣\sqrt{٢} - \sqrt{٢}) + (٢\sqrt[٣]{٤} - ٣\sqrt[٣]{٤})$

$= ٢\sqrt{٢} - \sqrt[٣]{٤}$



مثال ٥ أوجد ناتج $(\sqrt[٣]{٥} + ٢)(\sqrt[٣]{٢٥} - ٢\sqrt[٣]{٥} + ٤)$

الحل

المقدار $= \sqrt[٣]{٥} \times \sqrt[٣]{٢٥} - \sqrt[٣]{٥} \times ٢\sqrt[٣]{٥} + ٤ \times \sqrt[٣]{٥} + ٢ \times \sqrt[٣]{٢٥} - ٢ \times ٢\sqrt[٣]{٥} + ٢ \times ٤$

$= ٥ - ٢\sqrt[٣]{٢٥} + ٤\sqrt[٣]{٥} + ٢\sqrt[٣]{٢٥} - ٤\sqrt[٣]{٥} + ٨ = ٥ + ٨ = ١٣$

أسئلة للتدريب

تدريب (١)

اختصر ما يأتي لأبسط صورة:

① $\sqrt[٣]{٥٤} - \sqrt[٣]{١٦} + \sqrt[٣]{-٢}$

$= \sqrt[٣]{\ldots \times ٢} - \sqrt[٣]{\ldots \times \ldots}$ ....

$= \ldots\sqrt[٣]{\ldots} - \ldots\sqrt[٣]{\ldots}$ ....

$=$ ....

② $\sqrt[٣]{٢٤} + ٢\sqrt[٣]{٣} - ٣\sqrt[٣]{\frac{١}{٩}}$

$= \sqrt[٣]{\ldots} + ٢\sqrt[٣]{٣} - ٣\sqrt[٣]{\frac{١}{٩} \times \ldots}$ ....

$= \ldots\sqrt[٣]{\ldots} +$ .... − ....

$=$ ....

تمارين (٧) على العمليات على الجذور التكعيبية

الأسئلة الوزارية

أولاً: راجع معنا واختبر نفسك

١٠

$\frac{١}{٢}$ ساعة امتحان ومراجعة

اختبار تراكمي (٥)

١ (أ) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

① إذا كانت س عدداً صحيحاً وكان $\text{س} < \sqrt{٧} < \text{س} + ١$ فإن $\text{س} =$ ....

[١ ، ٢ ، ٣ ، ٤]

② $[٢ ، ٥] - [١ ، ٣] =$ ....

[[٣ ، ٥] ،]٣ ، ٥] ، [١ ، ٢[، [١ ، ٢]]

③ العدد التالي في النمط $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{١٢}$ ، $\sqrt{٢٧}$ ، $\sqrt{٤٨}$ هو ....

[$\sqrt{٥٠}$ ، $\sqrt{٧٥}$ ، $\sqrt{٦٠}$ ، $\sqrt{٩٠}$]

④ إذا كانت $\text{س} = \frac{٢}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}}$ ، $\text{ص} = \frac{٢}{\sqrt{٥} + \sqrt{٣}}$ فإن $\text{س}^٢ - ٢\text{س}\text{ص} + \text{ص}^٢$

$=$ .... [٢ ، ١٢ ، ٢٠ ، $٢(\sqrt{٥} - \sqrt{٣})$]

٤ درجات

(ب) إذا كانت $\text{س} = \sqrt{٣} + ٢$ ، $\text{ص} = \sqrt{٣} - ٢$ فأوجد $\frac{\text{س}\text{ص}}{\text{س} - \text{ص}}$

....

....

....

٣ درجات ....

(جـ) إذا كان $\text{أ} - \text{ب} = ٢\sqrt{٣}$ فأوجد قيمة $\text{أ}(\text{أ} - \text{ب})^٣ + \text{ب}(\text{ب} - \text{أ})^٣$

....

....

....

٣ درجات ....



ثانياً : أجب عما يأتى :

مسائل المستوى الأول

(٢) أكمل ما يأتى :

(١) $-\sqrt{4} + \sqrt[3]{-8} =$ ....

(٢) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} =$ ....

(٣) $\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2} =$ ....

(٤) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{\frac{4}{9}} =$ ....

(٥) $\sqrt[3]{\frac{-27}{8}} =$ ....

(٦) $(\sqrt{5})^{3} =$ ....

(٧) $\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{24} =$ ....

(٨) $\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{128} =$ ....

(٩) $\sqrt[3]{\frac{2}{5}} \times \sqrt[3]{\frac{4}{25}} =$ ....

(١٠) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \div \sqrt[3]{\frac{2}{9}} =$ ....

(١١) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{10} \times 6\sqrt[3]{100} =$ ....

(١٢) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{56} - \sqrt[3]{\frac{7}{27}} =$ ....

(٣) اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس:

(١) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24} =$ .... [$\sqrt[3]{57}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt[3]{3}$ ، ٣]

(٢) $\sqrt[3]{135} + \sqrt[3]{40} =$ .... [$\sqrt[3]{175}$ ، $\sqrt[3]{5}$ ، $5\sqrt[3]{5}$ ، ٥]

(٣) $2\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} =$ .... [$2\sqrt{27}$ ، ٦ ، $2\sqrt[3]{27}$ ، ٣]

(٤) $\frac{\sqrt[3]{-81}}{\sqrt[3]{3}} =$ .... [٣- ، ϕ ، $3\sqrt[3]{27}$ ، ٣]

(٤) ضع كلاً مما يأتى على صورة ا $\sqrt[3]{ب}$ حيث ا ، ب عددان صحيحان ، ب أصغر قيمة موجبة ممكنة

(١) $\sqrt[3]{54}$ (٢) $\sqrt[3]{40}$ (٣) $\sqrt[3]{128}$

(٤) $\sqrt[3]{-2000}$ (٥) $\sqrt[3]{\frac{10}{16}}$ (٦) $\sqrt[3]{-2160}$



(٥) اختصر لأبسط صورة :

(١) $5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{-54}$

(٢) $2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{-81} + \sqrt[3]{24}$

(٣) $\sqrt[3]{250} + 2\sqrt[3]{128} - 3\sqrt[3]{54}$

(٤) $4\sqrt[3]{81} - 3\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{192}$

مسائل المستوى الثانى

(٦) أوجد فى ابسط صورة :

(١) $\sqrt[3]{54} + 4\sqrt[3]{\frac{1}{4}} - \sqrt[3]{-2}$ [$6\sqrt[3]{2}$]

(٢) $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{-24} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ [صفر]

(٣) $\sqrt[3]{243} - 9\sqrt[3]{\frac{1}{3}} + (\sqrt[3]{-3})^{2}$ [$\sqrt[3]{9}$]

(٤) $\sqrt[3]{256} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}} - 4(\sqrt[3]{-2})^{2}$ [$\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$]

(٥) $\sqrt[3]{-54} + 10\sqrt[3]{\frac{1}{4}} - (\sqrt{2})^{3} - \sqrt{18}$ [$2\sqrt[3]{2} - 5\sqrt{2}$]

(٦) $\sqrt[3]{54} + \frac{14}{\sqrt{7}} - \sqrt{28} + \sqrt[3]{-16}$ [$\sqrt[3]{2}$]

(٧) $\sqrt{18} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{16} - 3\sqrt{2} - \sqrt[3]{54}$ [$-2\sqrt[3]{2}$]

(٨) $2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{200} + \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{25} + 3\sqrt{2}$ [٥]

(٩) $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{-24} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{9}} + \sqrt{98} + \frac{6}{\sqrt{18}}$ [$8\sqrt{2}$]

(١٠) $\sqrt{48} + \sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{16}$ [$\sqrt{3}$]

(١١) $4\sqrt[3]{\frac{1}{2}} + (\sqrt{2})^{صفر} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} - \sqrt[3]{32}$ [٣]

(٧) إذا كانت س = $\sqrt{2}$ ، ص = $\sqrt[3]{3}$ فأوجد (س ص^{3})$^{-2}$ [$\frac{1}{18}$]




٨ اثبت أن $\sqrt[3]{٥٤} \times \sqrt[3]{١٦} \div (\sqrt[3]{٤} \times ٦) = ١$

٩ أوجد ناتج كل مما يأتى :

① $\sqrt[3]{٢}\,(\sqrt[3]{٤} - ٢)$ ② $٢\sqrt[3]{٣}\,(\sqrt[3]{٩} - ٣)$

③ $(\sqrt[3]{٢} + ١)^٢$ ④ $(\sqrt[3]{٥} - \sqrt[3]{٣})^٢$

⑤ $(\sqrt[3]{٣} - ١)(\sqrt[3]{٩} + \sqrt[3]{٣} + ١)$ [٢]

⑥ $(\sqrt[3]{٣} - \sqrt[3]{٢})(\sqrt[3]{٩} + \sqrt[3]{٦} + \sqrt[3]{٤})$ [١]

⑦ $(\sqrt[3]{٣} + ٢)(\sqrt[3]{٩} - ٢\sqrt[3]{٣} + ٤)$ [١١]

⑧ $٢\sqrt[3]{٢}\,\left(٣\sqrt[3]{٤} - \sqrt[3]{٣٢} + ٨\sqrt[3]{\frac{١}{٢}}\right)$ [٢٠]

⑨ $(\sqrt[3]{٢} + \sqrt[3]{٤})^٢ - \sqrt[3]{٤} - ٢\sqrt[3]{٢}$ [٤]

١٠ إذا كانت $س = \sqrt[3]{٢} + ٣$ ، $ص = \sqrt[3]{٢} - ٣$

فأوجد قيمة : ① $(س + ص)^٣$ ② $(س - ص)^٣$ ③ $س^٣$

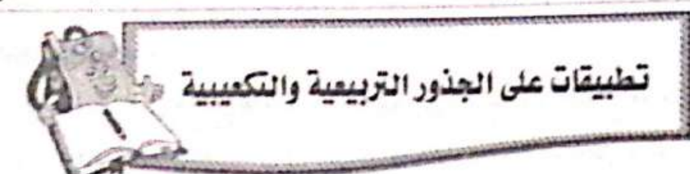
١١ إذا كان $س = ٣ + \sqrt[3]{٦}$ ، $ص = ٣ - \sqrt[3]{٦}$ فأوجد قيمة : $\left(\frac{س - ص}{س + ص}\right)^٣$ [$\frac{٢}{٩}$]

مسائل المتفوقين

١٢ ① أوجد ناتج $\left(س^٢ + ١ + \frac{١}{س^٢}\right)\left(س - \frac{١}{س}\right)$

② اجعل مقام الكسر $\frac{٢}{\sqrt[3]{٢}}$ عدداً نسبياً

③ إذا كان $(\sqrt{س})^٢ = (\sqrt[3]{س})^٣$ فأوجد قيم س الممكنة



تطبيقات على الجذور التربيعية والتكعيبية

أولاً : الأشكال الهندسية المستوية :

هى الأشكال التى يتكون كل منها من مجموعة جزئية من نقط مستوى ما و فيما يلى ملخصاً للقوانين الهامة الخاصة بمحيط ومساحة هذه الأشكال :

الشكل	المحيط	المساحة
المثلث	مجموع أطوال أضلاعه	$\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع العمودى عليها
متوازى الأضلاع	مجموع أطوال أضلاعه	طول القاعدة × الارتفاع العمودى عليها
المستطيل	(الطول + العرض) × ٢	الطول × العرض
المربع	طول الضلع × ٤	طول الضلع × نفسه ، $\frac{١}{٢}$ مربع طول قطره
المعين	طول الضلع × ٤	$\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى القطرين طول القاعدة × الارتفاع العمودى عليها
شبه المنحرف	مجموع أطوال أضلاعه	$\frac{١}{٢}$ مجموع طولى القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع

الدائرة

محيط الدائرة = $٢ \pi نق$ وحدة طول

مساحة الدائرة = $\pi نق^٢$ وحدة مربعة

حيث نق طول نصف قطر الدائرة ، π (النسبة التقريبية) = $\frac{٢٢}{٧}$ ما لم يذكر غير ذلك

ثانياً : الأجسام أو المجسمات :

- الأجسام تتكـون من مجموعـة غير منتهية من النقـط و تشغل حـيزاً من الفـراغ
- أى جسـم يقسـم الفــراغ إلــى ثــلاث مجموعــات مــن النقـــط :

(أ) مجموعة النقط الواقعة داخل الجسم

(ب) مجموعة النقط التـى تحـد الجسم من الخارج وتسمـى " بسطح الجسـم "

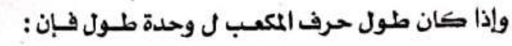
(هـ) مجموعة النقط الواقعة خارج الجسم

و اتحــاد المجموعتـــين (أ) ، (ب) يكــون مـا يسمــى "حجـم الجسـم"

وحــدة الحجــوم : هــى حجــم مكعــب طــول حرفــه ١ سم ، و توجد مضاعفات لهذه الوحدة مثل الديسيمتر المكعب و المتر المكعب

(١) المكعب

هو جسـم جميــع أوجهــه الستــة مربعــة الشــكل و متطابقـــة

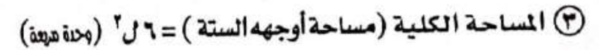


وإذا كان طول حرف المكعب ل وحدة طول فإن :



① مساحة الوجه = $ل^2$ (وحدة مربعة)

② المساحة الجانبية = ٤ $ل^2$ (وحدة مربعة)



③ المساحة الكلية (مساحة أوجهه الستة) = ٦ $ل^2$ (وحدة مربعة)

④ حجم المكعب = $ل^3$ (وحدة مكعبة)

ل

(٢) متوازى المستطيلات

هو جسم جميـع أوجهـه الستـة مستطيـلات و كل وجهـين متقابلـين متطابقـين

وإذا كانت أطوال أحرفه س ، ص ، ع وحدة طول فإن :

① المساحة الجانبية = محيـط القاعـدة × الإرتفـــاع
= ٢ (س + ص) × ع (وحدة مربعة)

② المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة
= ٢ (س ص + ص ع + ع س) (وحدة مربعة)

③ حجمـــه = مساحــة القاعـدة × الإرتفـــاع
= س × ص × ع (وحدة مكعبة)

ع
س
ص

(٣) الأسطوانة الدائرية القائمة

هى جسم لـه قاعدتـان متوازيتـان ومتطابقتان كل منهما عبارة عن سطح دائـرى أمــا السطــح الجانبـى فهــو سطـح منحنـى يسمــى بالسطـح الأسطوانــى

إذا كان طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة نق و ارتفاعها ع فإن :

① المساحة الجانبية للأسطوانة = ٢ π نق ع (وحدة مربعة)

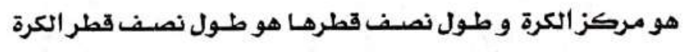
② المساحة الكليــة للأسطوانة = ٢ π نق ع + ٢ π $نق^2$ (وحدة مربعة)

③ حجــم الأسطوانة = π $نق^2$ ع (وحدة مكعبة)

نق
ع

(٤) الكـرة

هــى جسـم سطحـه منحنـى و جميـع النقـط التـى تنتمـى إلـى سطـح الكـرة تكـون على أبعـاد متساويـة من نقطـة ثابتـة داخـل الكـرة تسمى مركـز الكـرة و إذا قطعت الكرة بمستوى مـار بمركزهـا فإن المقطـع دائـرة مركزها هو مركز الكرة و طول نصف قطرها هو طـول نصـف قطر الكرة



① مساحة سطح الكرة = ٤ π $نق^2$ (وحدة مربعة)

② حجـم الكـــرة = $\frac{٤}{٣}$ π $نق^3$ (وحدة مكعبة)

أمثلة توضيحية

مثال ١ دائرة طول نصف قطرها ٣,٥ سم أوجد :

① محيط الدائرة ② مساحة الدائرة ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

الحـل

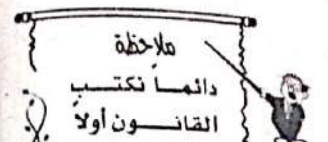
① محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × $\frac{٣٥}{١٠}$ = ٢٢ سم

② مساحة الدائرة = π $نق^2$ = $\frac{٢٢}{٧}$ × $\frac{٣٥}{١٠}$ × $\frac{٣٥}{١٠}$ = ٣٨,٥ $سم^2$



مثال ٢ دائرة مساحتها ٦١٦ سم^{٢} أوجد محيطها

الحل



∵ مساحة الدائرة = π نق^{٢}

∴ ٦١٦ = $\frac{٢٢}{٧}$ × نق^{٢}

∴ نق^{٢} = ٦١٦ × $\frac{٧}{٢٢}$ = ١٩٦ ∴ نق = ١٤ سم

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ = ٨٨ سم

مثال ٣ مكعب حجمه ٨ سم^{٣} احسب مساحة وجهه و مساحته الكلية

الحل

نفرض أن طول حرف المكعب = ل سم

∵ حجم المكعب = ل^{٣}

∴ ٨ = ل^{٣} ∴ ل = $\sqrt[٣]{٨}$ = ٢ سم

∵ مساحة وجهه = ل^{٢} = (٢)^{٢} = ٤ سم^{٢}

المساحة الكلية للمكعب = ٦ ل^{٢}

= ٦ × ٤ = ٢٤ سم^{٢}

مثال ٤ متوازي مستطيلات بعدا قاعدته ٥ سم ، ٦ سم و ارتفاعه = ١٠ سم **أوجد :**

① مساحته الجانبية ② مساحته الكلية ③ حجمه

الحل

محيط القاعدة = (الطول + العرض) × ٢ = (٥ + ٦) × ٢ = ٢٢ سم

① المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

= ٢٢ × ١٠ = ٢٢٠ سم^{٢}

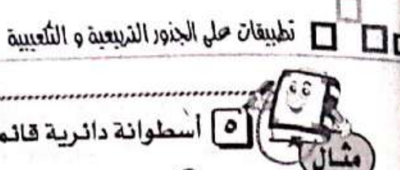
② المساحة الكلية = ٢ (٥ × ٦ + ٦ × ١٠ + ١٠ × ٥)

= ٢ (٣٠ + ٦٠ + ٥٠) = ٢٨٠ سم^{٢}

③ الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

= ٥ × ٦ × ١٠ = ٣٠٠ سم^{٣}





مثال ٥ أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٨ سم ، طول قطر قاعدتها ١٤ سم **أوجد :**

① حجمها ② مساحتها الجانبية (π = $\frac{٢٢}{٧}$)

الحل

∵ ٢ نق = ١٤ سم ∴ نق = ٧ سم

① حجم الأسطوانة = π نق^{٢} ع = $\frac{٢٢}{٧}$ × (٧)^{٢} × ٨ = ١٢٣٢ سم^{٣}

② مساحتها الجانبية = ٢ π نق ع = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ٨ = ٣٥٢ سم^{٢}

مثال ٦ **احسب** طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة الدائرية القائمة التي حجمها ٧٧٠ سم^{٣} و ارتفاعها ٥ سم (π = $\frac{٢٢}{٧}$)

الحل

∵ حجم الأسطوانة = π نق^{٢} ع

∴ ٧٧٠ = $\frac{٢٢}{٧}$ × نق^{٢} × ٥

∴ نق^{٢} = $\frac{٧٧٠ × ٧}{٥ × ٢٢}$ = ٤٩ ∴ نق = ٧ سم

مثال ٧ أوجد مساحة الكرة التي طول نصف قطرها ١ سم بدلالة π

الحل

مساحة الكرة = ٤ π نق^{٢} = ٤ × π × (١)^{٢} = ٤ π سم^{٢}

ملاحظة
بدلالة π تعني
أننا لا نعوض عن π

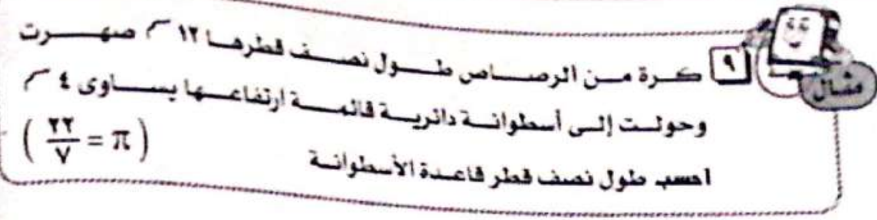
مثال ٨ إذا كان طول نصف قطر كرة ٣ سم فأوجد حجمها (π = ٣,١٤)

الحل

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

= $\frac{٤}{٣}$ × ٣,١٤ × (٣)^{٣} = ١١٣,٠٤ سم^{٣}





مثال ٩ كرة من الرصاص طول نصف قطرها ١٢ سم صهرت وحولت إلى أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوى ٤ سم
احسب طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

الحل

حجم الكرة $= \frac{٤}{٣}\pi$ نق$^{٣} = \frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times (١٢)^{٣}$

∵ حجم الأسطوانة $= \pi$ نق^{٢} ع $= \frac{٢٢}{٧} \times$ نق$^{٢} \times ٤$

حجم الأسطوانة = حجم الكرة

∴ $\frac{٢٢}{٧} \times$ نق$^{٢} \times ٤ = \frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times (١٢)^{٣}$

∴ نق$^{٢} = \frac{(١٢)^{٣}}{٣} = ٥٧٦$

∴ نق = ٢٤ سم

مثال ١٠ قطعة من الورق على شكل مستطيل أ ب جـ د ، فيه أ ب = ١٠ سم ، ب جـ = ٤٤ سم
طويت على شكل اسطوانة دائرية قائمة بحيث ينطبق $\overline{أب}$ على $\overline{دجـ}$
أوجد حجم الأسطوانة الناتجة $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

الحل

(شكل: مستطيل أ ب جـ د ، أ ب = ١٠ سم ، ب جـ = ٤٤ سم)

محيط قاعدة الأسطوانة = ٤٤ سم

٢π نق $= ٤٤$

$٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times$ نق $= ٤٤$ ∴ نق = ٧ سم

حجم الأسطوانة $= \pi$ نق^{٢} ع

$= \frac{٢٢}{٧} \times (٧)^{٢} \times ١٠$

$= ١٥٤٠$ سم^{٣}



أسئلة للتدريب

تدريب (١)

مكعب طول حرفه ٣ سم أوجد :

① حجمه ② مساحته الكلية

الحل

① حجم المكعب = ... = (.......)^{٣} = ...

② مساحته الكلية = ٦ ل^{٢} = ... × .... = ...

تدريب (٢)

متوازى مستطيلات بعدا قاعدته ٥ سم ، ٤ سم وارتفاعه ٣ سم أوجد :

① حجمه ② مساحته الجانبية ③ مساحته الكلية

الحل

① حجم متوازى المستطيلات = الطول × .... × .... (تكتب القانون)

= ...... × ...... × ...... = ... سم^{٣} (نعوض في القانون)

② محيط القاعدة = (الطول + العرض) × ٢ = (.... + ...) × ٢ = ...

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × .... (تكتب القانون)

= ...... × ...... = ... سم^{٢} (نعوض في القانون)

③ المساحة الكلية = ٢ (...... + ... + ...) = ...

تدريب (٣)

اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ١٠ سم وطول نصف قطر قاعدتها ٧ سم

أوجد حجمها ومساحتها الجانبية $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

الحل

حجم الاسطوانة = ... (تكتب القانون)

= .... = ... (نعوض في القانون)

مساحتها الجانبية = ... (تكتب القانون)

= .... = ... (نعوض في القانون)



تدريب (٤) اسطوانة دائرية قائمة حجمها ١٥,٤ سم³ وارتفاعها ١٠ سم

أوجد طول نصف قطر قاعدتها وأوجد المساحة الجانبية $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

الحل

∵ حجم الاسطوانة = ... (نكتب القانون)

∴ .... = ... × $نق^{٢}$ × .... (نعوض في القانون)

∴ .... = ... $نق^{٢}$ (نبسط الحل)

∴ $نق^{٢}$ = ... = ... ∴ نق = ... (نوجد نق)

∴ المساحة الجانبية = ٢ .... (نكتب القانون)

= .... = ... (نعوض في القانون)

تدريب (٥) إذا كان طول نصف قطر كرة = ٣,٥ سم

فأوجد حجم الكرة ومساحتها $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

الحل

حجم الكرة = ... (نكتب القانون)

= .... = ... (نعوض في القانون)

مساحة الكرة = ... (نكتب القانون)

= .... = ... (نعوض في القانون)

تدريب (٦) إذا كان حجم كرة ٣٦ π سم³ فأوجد طول قطرها

الحل

حجم الكرة = ... (نكتب القانون)

٣٦ π = ... (نعوض في القانون)

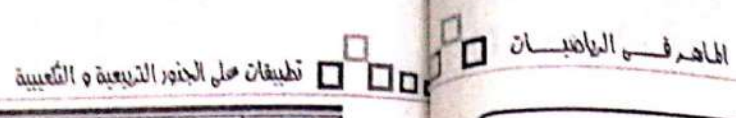
..... × ٣٦ π = ... × .... $\left(\text{بالضرب} \times \frac{٣}{٤}\right)$

∴ $نق^{٣}$ = ...

∴ نق = ...

∴ طول القطر = ...





تمارين (٨) على تطبيقات على الجذور التربيعية و التكعيبية

أسئلة الوزارة

أولاً : راجع معنا واختبر نفسك — ١٠ — $\frac{١}{٣}$ ساعة امتحان ومراجعة

اختبار تراكمي (٦)

١ (أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

① $[٣، ٥[\cap \{٣، ٥\}$ = ...

[{٣، ٥} أو]٣، ٥[أو {٣} أو {٥}]

② $\left| \sqrt{٤٥} - \frac{٣}{٢}\sqrt{٢٠} - ٢\sqrt[٣]{\frac{١}{٤}} \right|$ = ...

[$-\sqrt[٣]{٢}$ أو صفر أو $\sqrt[٣]{٢}$ أو $٦\sqrt{٥} + \sqrt[٣]{٢}$]

③ إذا كانت $س = \frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ ، $ص^{-١} = \frac{١}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ فإن قيمة $س^{٢} ص^{٢}$ = ...

[١ أو ٤ أو ٢ أو ١٦]

④ مجموعة حل المعادلة $\frac{١}{٦} س^{٣} - ٩ = ٢٧$ في ح هي ....

[ϕ أو {٦} أو {٢١٦} أو {٣٦}]

٤ درجات

(ب) إذا كانت $س = ٢\sqrt{٢} - \sqrt{٣}$ ، $ص = \frac{٥}{٢\sqrt{٢} - \sqrt{٣}}$

فأثبت أن س ، ص عددان مترافقان واحسب قيمة $\frac{س + ص}{س ص}$

....

....

....

٣ درجات

(جـ) أوجد على صورة فترة مستعيناً بخط الأعداد $]-\infty، ١] \cup [٢، \infty[$

....

....

....

٣ درجات



ثانياً : أجـب عـمـا يـأتـى :

مسائل المستوى الأول

٢ أوجد ما يأتى :

① محيط الدائرة التى طول نصف قطرها ١٤ سم
② مساحة الدائرة التى طول نصف قطرها ٧ سم
③ حجم مكعب طول حرفه ٢ سم
④ المساحة الجانبية لمكعب طول حرفه ٣ سم
⑤ المساحة الكلية لمكعب طول حرفه ٤ سم
⑥ مساحة الكرة التى طول قطرها ٢ سم
⑦ حجم اسطوانة طول نصف قطرها ٧ سم و ارتفاعها ١٠ سم
⑧ حجم متوازى مستطيلات أبعاده ٢ سم ، ٣ سم ، ٤ سم
⑨ المساحة الجانبية لمتوازى مستطيلات محيط قاعدته ١٥ سم و أرتفاعه ٢ سم
⑩ المساحة الكلية لمتوازى مستطيلات بُعدا قاعدته ٢ سم ، ٣ سم و أرتفاعه ١٠ سم

مسائل المستوى الثانى

٣ أكمل كلاً مما يأتى :

ملاحظة : ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$) ما لم يذكر غير ذلك

① مساحة الدائرة التى طول نصف قطرها $\sqrt{٧}$ سم = ... سم²
② إذا كانت مساحة دائرة ٢٥ π سم² فإن طول نصف قطرها = ... سم
③ مكعب حجمه ٦٤ سم³ فإن مساحته الكلية = ... سم²
④ مكعب مساحته الكلية ٥٤ سم² فإن طول حرفه = ... سم
⑤ إذا كان حجم مكعب ٢٧ سم³ فإن مساحة أحد أوجهه = ... سم²
⑥ الكرة التى طول نصف قطرها يساوى ١ سم يكون حجمها مساوياً ....
⑦ الكرة التى حجمها $\frac{٩}{٢}$ π سم³ يكون طول نصف قطرها .... سم



⑧ الكرة التى طول نصف قطرها $\frac{٣}{\sqrt{\pi}}$ سم تكون مساحتها = ... سم²
⑨ أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٢٠ سم و حجمها ٢٨٨٠ π سم³ فإن طول نصف قطر قاعدتها يساوى .... سم

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

① مكعب حجمه ٨ سم³ فإن مساحته الجانبية = ... سم²
[٢ أ، ٤ أ، ١٦ أ، ٢٤]
② إذا كانت المساحة الكلية للمكعب ٩٦ سم² فإن مساحة الوجه الواحد = ...
[٢٤ سم² أ، ١٦ سم² أ، ١٦ سم² أ، ٤٨ سم²]
③ حجم المكعب الذى طول حرفه ٤ سم = ...
[١٦ سم³ أ، ٦٤ سم³ أ، ٩٦ سم³ أ، ٢٤ سم³]
④ إذا كان حجم كرة هو ٣٢ $\sqrt{٣}$ π سم³ فإن طول نصف قطرها = ...
[٢ $\sqrt{٣}$ سم³ أ، ٢ $\sqrt{٣}$ سم أ، ٣ سم³ أ، ٣ سم]
⑤ طول نصف قطر الكرة التى حجمها ٣٦ π سم³ هو ....
[١ سم أ، ٢ سم أ، ٣ سم أ، ٤ سم]
⑥ كرة حجمها $\frac{٤}{٣}$ π سم³ فإن طول قطرها = ...
[١ سم أ، ٢ سم أ، ٣ سم أ، $\frac{١}{٢}$ سم]
⑦ حجم كرة طول قطرها ٦ سم = ...
[٤ π سم³ أ، ٣٦ π سم³ أ، ٢٨٨ π سم³ أ، ١٢ π سم³]
⑧ إذا كانت مساحة دائرة ٢ π سم² فإن طول نصف قطرها = ... سم
[١ أ، ٢ أ، $\sqrt{٢}$ أ، ٤]
⑨ إذا كانت المساحة الجانبية لأسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطرها نق هى ٨ π نق سم² فإن ارتفاعها = ...
[١٠ سم أ، ٨ سم أ، ٤ سم أ، ١٦ سم]
⑩ أسطوانة ارتفاعها يساوى طول قطر قاعدتها فإن حجمها = ...
[$\frac{٤}{٣}$ π نق³ سم³ أ، π نق³ سم³ أ، $\frac{١}{٢}$ π نق³ سم³ أ، ٢ π نق³ سم³]

(١١) طول نصف قطر قاعدة اسطوانة دائرية قائمة حجمها 40π سم^3 وارتفاعها ١٠ سم يساوى .... سم [٥ أ، ٣ أ، ٢ أ، ١]

(١٢) متوازى المستطيلات الذى ابعاده $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{6}$ من السنتيمترات يكون حجمه = ... سم^3 [٦ أ، ٣٦ أ، $6\sqrt{6}$ أ، $18\sqrt{2}$]

٥

(١) دائرة طول نصف قطرها ٧ سم أوجد محيط الدائرة و مساحتها [٤٤ سم، ١٥٤ سم^2]

(٢) دائرة محيطها ٢٢ سم أوجد مساحة هذه الدائرة [٣٨,٥ سم^2]

(٣) دائرة مساحتها ١,٥٤ سم^2 أوجد طول نصف قطرها [٠,٧ سم]

(٤) دائرة مساحتها ١٥٤ سم^2 أوجد محيط هذه الدائرة [٤٤ سم]

(٥) مربع مساحة سطحه ١٢ سم^2 أوجد طول ضلعه [$2\sqrt{3}$ سم]

(٦) فى الشكل المقابل :
$\overline{أب}$ قطر نصف الدائرة فإذا كانت مساحة هذه المنطقة ٧٧ سم^2 أوجد محيط الشكل [٣٦ سم]

أ م ب

(٧) فى الشكل المقابل :
دائرتان متحدتان فى المركز م طول نصف قطريهما ٣ سم ، ٥ سم أوجد مساحة الجزء المظلل بدلالة π [16π سم^2]

م

٦

(١) مكعب طول حرفه ٥ سم أوجد حجمه و مساحته الكلية [١٢٥ سم^3، ١٥٠ سم^2]

(٢) مكعب حجمه ٨ سم^3 أوجد مساحة أحد أوجهه [٤ سم^2]

(٣) أوجد طول حرف مكعب حجمه $15\frac{5}{8}$ سم^3 [٢,٥ سم]

(٤) مكعب حجمه ١٠٠٠ سم^3 احسب مساحته الكلية [٦٠٠ سم^2]

(٥) مكعب حجمه ٦٤ سم^3 أوجد مساحته الجانبية [٦٤ سم^2]

(٦) إذا كان طول حرف مكعب يساوى طول نصف قطر الكرة التى حجمها 36π سم^3 أوجد المساحة الكلية للمكعب [٥٤ سم^2]

٧

(١) أوجد حجم كرة طول نصف قطرها $\sqrt[3]{21}$ سم [٨٨ سم^3]

(٢) أوجد طول نصف قطر كرة حجمها 36π سم^3 [٣ سم]

(٣) كرة مساحتها 36π سم^2 أوجد طول نصف قطرها ثم أوجد حجمها [٣ سم، 36π سم^3]

(٤) كرة حجمها $\frac{500\pi}{3}$ سم^3 أوجد طول نصف قطرها [٥ سم]

(٥) أوجد طول قطر الكرة التى حجمها ٤١٨٨ سم^3 (π = ٣,١٤١) [٢٠ سم]

(٦) أوجد الحجم و مساحة السطح لكرة طول قطرها ٤,٢ سم [٣٨,٨٠٨ سم^3، ٥٥,٤٤ سم^2]

(٧) كرة حجمها $562{,}5\pi$ سم^3 أوجد مساحة سطحها بدلالة π [225π سم^2]

(٨) وضعت كرة داخل مكعب طول حرفه ١٤ سم فمست أوجهه الستة أوجد النسبة بين حجم الكرة و حجم المكعب [١١ : ٢١]

(٩) كرة حجمها 36π سم^3 وضعت داخل مكعب فمست أوجه المكعب الستة أوجد طول نصف قطر الكرة و حجم المكعب [٣ سم، ٢١٦ سم^3]

(١٠) كرة من المعدن طول نصف قطرها ٣ سم صهرت وحولت إلى أسطوانة طول نصف قطر قاعدتها ٣ سم احسب ارتفاع الأسطوانة [٤ سم]

٨

(١) أوجد حجم أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٢٠ سم و طول نصف قطر قاعدتها ٧ سم [٣٠٨٠ سم^3]

(٢) أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ١٤ سم وطول نصف قطر قاعدتها ١٠ سم أوجد المساحة الجانبية للأسطوانة [٨٨٠ سم^2]

(٣) أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٥ سم و حجمها 125π سم^3 أوجد طول قطر قاعدتها [١٠ سم]

(٤) أسطوانة دائرية قائمة حجمها 500π سم^3 و طول نصف قطر قاعدتها ٥ سم أوجد ارتفاعها [٢٠ سم]

(٥) إذا كان حجم أسطوانة دائرية قائمة هو ١٥٤٠ سم^3 و ارتفاعها ١٠ سم فأوجد طول نصف قطر قاعدتها و مساحتها الكلية [٧ سم، ٧٤٨ سم^2]

⑥ إذا كان حجم أسطوانة دائرية قائمة = ٦٤ π سم³ وكان ارتفاعها = طول نصف قطرها أوجد ارتفاعها [٤ سم]

⑦ احسب طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة الدائرية القائمة التى حجمها ٧٥٣٦ سم³ و ارتفاعها ٢٤ سم (π = ٣,١٤) [١٠ سم]

⑧ أسطوانة دائرية قائمة محيط قاعدتها ٤٤ سم وارتفاعها ٥ سم أوجد حجمها [٧٧٠ سم³]

⑨ **أيهما أكبر حجماً** أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٧ سم و إرتفاعها ١٠ سم ، أم مكعب طول حرفه ١١ سم [الأسطوانة]

⑩ قطعة من النحاس على شكل أسطوانة دائرية قائمة مصمتة طول نصف قطر قاعدتها ٦ سم وارتفاعها ٨ سم صهرت وحولت إلى كرة مصمتة **أوجد** طول نصف قطر الكرة [٦ سم]

⑪ قطعة من الشيكولاتة على شكل أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ١١ سم وارتفاعها ١٠,٥ سم صهرت وحولت إلى ٣ مكعبات متساوية الحجم **أوجد** طول حرف المكعب الواحد [١١ سم]

⑫ أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٢٠ سم **أوجد** طول نصف قطر قاعدتها إذا علم أن حجمها يساوى $\frac{٤}{٩}$ حجم كرة طول قطرها ٣٠ سم [١٠ سم]

⑬ قطعة من الورق على شكل مستطيل أ ب جـ ء فيه أ ب = ١٠ سم ، ب جـ = ٤٤ سم طويت على شكل اسطوانة دائرية قائمة بحيث ينطبق $\overline{أب}$ على $\overline{جـء}$ **أوجد** حجم الأسطوانة الناتجة [١٥٤٠ سم³]

٩ ① متوازى مستطيلات بُعدا قاعدته ٣ سم ، ٤ سم و ارتفاعه ٦ سم **أوجد :**

(أ) حجمه (ب) مساحته الجانبية (جـ) مساحته الكلية

[٧٢ سم³ ، ٨٤ سم² ، ١٠٨ سم²]

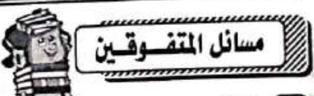
② متوازى مستطيلات ارتفاعه ١٠ سم وحجمه ٣٦٠ سم³ **أوجد** مساحة قاعدته و إذا كان طول أحد أضلاع قاعدته = ٩ سم **فأوجد :**

(أ) مساحته الجانبية [٢٦٠ سم²] (ب) مساحته الكلية [٣٣٢ سم²]

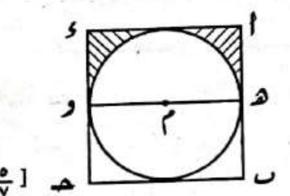


③ قطعة من الرصاص على شكل متوازى مستطيلات أطوال أحرفه ٧٧ سم ، ٢٤ سم ، ٢١ سم صهرت وصنع من مادتها المنصهرة كرة **أوجد** طول نصف قطر الكرة [٢١ سم]

④ **أيهما أكبر حجماً** مكعب مساحته الكلية ٢٩٤ سم² أم متوازى مستطيلات أبعاده ٧ $\sqrt{٢}$ ، ٥ $\sqrt{٢}$ ، ٥ من السنتيمترات [متوازى المستطيلات]



١٠ **فى الشكل المقابل :**



الدائرة م مرسومة داخل المربع أ ب جـ ء فإذا كانت مساحة الجزء المظلل هو $\frac{٥}{٧}$ ١٠ سم² **أوجد** محيط هذا الجزء ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$) [$\frac{٥}{٧}$ ٣٥ سم]

١١ قطعة من الورق المقوى مستطيلة الشكل بُعداها ٢٥ ، ١٥ سم قطع من كل ركن من أركانها الأربعة مربع طول ضلعه ٤ سم ثم طويت الأجزاء البارزة لتكون حوضاً على شكل متوازى مستطيلات **أوجد** حجمه و مساحته الكلية [٤٧٦ سم³ ، ٣١١ سم²]

١٢ صندوق من الزجاج على شكل مكعب بدون غطاء طول حرفه الخارجى ٦ سم فإذا كان سمك الزجاج المصنوع منه الصندوق يساوى ١ سم **فأوجد** حجم الزجاج المستخدم لصناعة الصندوق [١٣٦ سم³]

١٣ متوازى مستطيلات أبعاده ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم **ارسم** متوازى المستطيلات فى أوضاع مختلفة من حيث اختيار القاعدة . **هل** تختلف المساحة الجانبية من وضع إلى آخر ؟

١٤ كرة جوفاء من المعدن طول نصف قطرها الداخلى ٢,١ سم و طول نصف قطرها الخارجى ٣,٥ سم **أوجد** كتلتها لأقرب جرام علماً بأن السنتيمتر المكعب من هذا المعدن كتلته ٢٠ جم ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

حل المعادلات و المتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح

أولاً : حل المعادلات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح

المعادلة : هى جملة رياضية تحتوى على متغير (مجهول) مثل س وتحتوى على علامة التساوى مثل س + ١ = ٣ وتسمى معادلة من الدرجة الأولى حيث المتغير (المجهول) س مرفوعاً للقوة الأولى (الأس ١)

و حل المعادلة هو إيجاد العدد الذى يحل محل المجهول ليجعل طرفى المعادلة متساويين

فمثلاً فى المعادلة س + ١ = ٣ نجد أن العدد ٢ هو الذى يحل محل س ليجعل الطرفين متساويين فى هذه الحالة نقول أن ٢ حل للمعادلة

ثانياً : حل المتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح

المتباينة : هى الجملة الرياضية التى تحتوى على متغير مثل س و تتضمن علاقة < أو > أو ≥ أو ≤

و حل المتباينة هو مجموعة العناصر التى يحقق كل منها المتباينة

و الخواص التالية تستخدم لحل المتباينات فى ح :

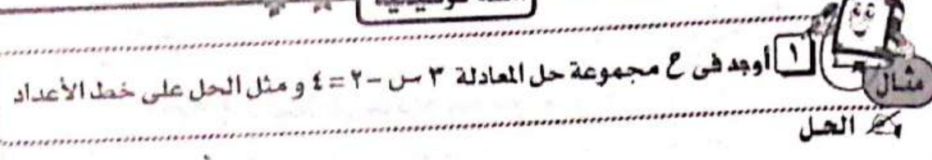
① يمكن إضافة أو طرح عدد ثابت من طرفى المتباينة دون أن يتغير اتجاهها

② يمكن ضرب أو قسمة طرفى المتباينة على عدد ثابت موجب دون أن يتغير اتجاهها

③ يمكن ضرب أو قسمة طرفى المتباينة على عدد ثابت سالب مع تغيير اتجاهها

أى أن إذا كان أ ، ب ، جـ ثلاثة أعداد حقيقية أ < ب فإن

- أ + جـ < ب + جـ ، أ - جـ < ب - جـ
- أ جـ < ب جـ إذا كانت جـ عدد موجب
- أ جـ > ب جـ إذا كانت جـ عدد سالب



أمثلة توضيحية

مثال ١ أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة ٣ س - ٢ = ٤ و مثل الحل على خط الأعداد

الحل

نحاول أن نجعل س فى طرف بمفردها لذلك نتخلص من الرقم المجموع أو المطروح ثم الرقم المضروب × س

∴ ٣ س - ٢ = ٤ (بإضافة ٢ إلى طرفى المعادلة)

∴ ٣ س = ٦ بالقسمة على ٣

∴ س = ٢ ∴ م.ح = { ٢ }

-١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

مثال ٢ أوجد فى ح مجموعة حل المعادلات الآتية مع التمثيل على خط الأعداد

① ٢ س - ٣ = ٤ ② ٢ (س + ١) - ٣ = ٥

الحل

① ∵ ٢ س - ٣ = ٤ ∴ ٢ س = ٤ + ٣

∴ ٢ س = ٧ ∴ س = $\frac{٧}{٢}$ ∴ س = ٣ $\frac{١}{٢}$

∴ م.ح = { ٣ $\frac{١}{٢}$ }

-١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

② ∵ ٢ (س + ١) - ٣ = ٥ (نفك الأقواس أولاً)

∴ ٢ س + ٢ - ٣ = ٥ ∴ ٢ س = ٥ + ٣ - ٢

∴ ٢ س = ٦ ∴ س = ٣

∴ م.ح = { ٣ }

-١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

مثال ٣ أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $\sqrt{٣}$ س + ٢ = ٥ و مثل الحل على خط الأعداد

الحل

$\sqrt{٣}$ س + ٢ = ٥ ∴ $\sqrt{٣}$ س = ٥ - ٢

$\sqrt{٣}$ س = ٣ ∴ س = $\frac{٣}{\sqrt{٣}}$

∴ س = $\frac{٣}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٣}$

∴ س = $\sqrt{٣}$

∴ م.ح = { $\sqrt{٣}$ } وتمثل على خط الأعداد كما سبق

$\frac{٣-١}{٢} = ١$ ، $\frac{٣+١}{٢} = ٢$

٣ ٢ ١ ٠ ١-

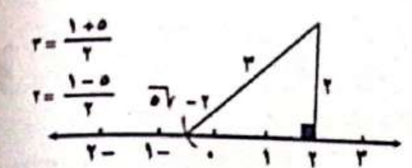
مثال ٤ أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة س + $\sqrt{٥}$ = ٢ ومثل الحل على خط الأعداد

الحل

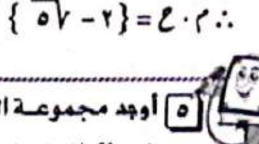
∵ س + $\sqrt{٥}$ = ٢

∴ س = ٢ - $\sqrt{٥}$

∴ م.ح = { ٢ - $\sqrt{٥}$ }



$\frac{٥+١}{٢} = ٣$ ، $\frac{٥-١}{٢} = ٢$



مثال ٥ أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية فى ح على صورة فترة ثم مثل الحل على خط الأعداد:

① ٣ س + ٦ ≥ ٠ ② ٤ س - ٥ < ٣ ③ ٣ - ٢ س ≤ ٧

الحل

① ∵ ٣ س + ٦ ≥ ٠ (بإضافة (-٦) للطرفين)

∴ ٣ س + ٦ - ٦ ≥ ٠ - ٦

∴ ٣ س ≥ -٦ (بضرب الطرفين × $\frac{١}{٣}$)

∴ $\frac{١}{٣}$ × ٣ س ≥ -٦ × $\frac{١}{٣}$

∴ س ≥ -٢

∴ م.ح = [-٢ ، ∞[

٤ ٣ ٢ ١ ٠ ١- ٢- ٣-

② ∵ ٤ س - ٥ < ٣ (بإضافة ٥ للطرفين)

∴ ٤ س - ٥ + ٥ < ٣ + ٥

∴ ٤ س < ٨ (بالضرب × $\frac{١}{٤}$)

∴ $\frac{١}{٤}$ × ٤ س < ٨ × $\frac{١}{٤}$

∴ س < ٢

∴ م.ح =]-∞ ، ٢[

٥ ٤ ٣ ٢ ١ ٠ ١-



③ ∵ ٣ - ٢ س ≤ ٧ (بإضافة (-٣) للطرفين)

∴ ٣ - ٢ س - ٣ ≤ ٧ - ٣

∴ -٢ س ≤ ٤ (بالقسمة على -٢)

∴ س ≥ -٢ (لاحظ تغير اتجاه علامة التباين)

∴ م.ح = [-٢ ، ∞[

٣ ٢ ١ ٠ ١- ٢- ٣-

(لاحظ أن)
عند ضرب أو قسمة طرفى المتباينة على عدد سالب نعكس اتجاه علامة التباين

مثال ٦ أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية فى ح على صورة فترة ثم مثل الحل على خط الأعداد:

① ٣ ≤ ٢ س + ١ < ٥ ② ٥ ≥ ٢ - ٣ س > -٧

الحل

① ∵ ٣ ≤ ٢ س + ١ < ٥ (بإضافة (-١) إلى أطراف المتباينة)

∴ ٣ - ١ ≤ ٢ س + ١ - ١ < ٥ - ١

∴ ٢ ≤ ٢ س < ٤ (بالقسمة على ٢)

∴ ١ ≤ س < ٢

∴ م.ح = [١ ، ٢[

٤ ٣ ٢ ١ ٠ ١-

② ∵ ٥ ≥ ٢ - ٣ س > -٧ (بإضافة (-٢) إلى أطراف المتباينة)

∴ ٥ - ٢ ≥ ٢ - ٢ - ٣ س > -٧ - ٢

∴ ٣ ≥ -٣ س > -٩ (بقسمة أطراف المتباينة على -٣)

∴ -١ ≤ س < ٣

∴ م.ح = [-١ ، ٣[

٤ ٣ ٢ ١ ٠ ١- ٢-

ملاحظة

- إذا طلب مجموعة الحل للمتباينة السابقة فى ط أو فى ص فتكون بهذا الشكل :

مجموعة حل هذه المتباينة فى ط = { ٠ ، ١ ، ٢ }

مجموعة حل هذه المتباينة فى ص = { -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ }



مثال ٧ أوجد على صورة فترة مجموعة الحل فى ح للمتباينة الآتية :

$\frac{٤س - ٣}{٢} < \frac{٥س - ٤}{٣}$

الحل

∵ $\frac{٤س - ٣}{٢} < \frac{٥س - ٤}{٣}$ (بضرب الطرفين × ٦)

∴ ١٢س - ٩ < ١٠س - ٨ (بإضافة (-١٠س) للطرفين)

∴ ٢س - ٩ < -٨ (بإضافة (٩) للطرفين)

∴ ٢س < ١ (بالقسمة على ٢)

∴ س < $\frac{١}{٢}$

∴ م.ح =]-∞ ، $\frac{١}{٢}$[

مثال ٨ حل المتباينة ٥ + س < ٢س + ١ < ٩ + س فى ح و مثل الحل على خط الأعداد

الحل

∵ ٥ + س < ٢س + ١ < ٩ + س (بإضافة (-س) إلى أطراف المتباينة)

∴ ٥ + س - س < ٢س + ١ - س < ٩ + س - س

∴ ٥ < س + ١ < ٩ (بإضافة (-١) إلى أطراف المتباينة)

∴ ٥ - ١ < س + ١ - ١ < ٩ - ١

∴ ٤ < س < ٨

∴ م.ح =]٤ ، ٨[

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨

مثال ٩ حل المتباينة الآتية فى ح ثم مثل الحل على خط الأعداد :

٨ + س ≤ ٤س - ١ < ١ + ٢س

الحل

نلاحظ أن معاملات س مختلفة فى الأطراف الثلاثة للمتباينة لذلك نقسم المتباينة إلى متباينتين وهما : ① ٨ + س ≤ ٤س - ١ ، ② ٤س - ١ < ١ + ٢س

ثم نوجد مجموعة التقاطع لمجموعتى الحل لهما



① ∵ ٨ + س ≤ ٤س - ١

∴ ٨ + س - س ≤ ٤س - ١ - س

∴ ٨ ≤ ٣س - ١

∴ ٨ + ١ ≤ ٣س - ١ + ١

∴ ٩ ≤ ٣س

∴ ٣ ≤ س

② ∵ ٤س - ١ < ١ + ٢س

٤س - ١ - ٢س < ١ + ٢س - ٢س

٢س - ١ < ١

٢س - ١ + ١ < ١ + ١

٢س < ٢

س < ١

∴ ٣ ≤ س < ١

∴ م.ح = [١ ، ٣]

٢- ١- ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥



تدريب (١)

أكمل لإيجاد مجموعة حل المعادلة الآتية فى ح مع التمثيل على خط الأعداد

س - √٥ = ١ ∴ س = ...

∴ م.ح = ...

و تمثل على خط الأعداد

٣- ٢- ١- ٠ ١ ٢ ٣ ٤

تدريب (٢)

حل المتباينة ٢س - ٣ ≤ ١ فى ح ثم مثل الحل على خط الأعداد

الحل

∵ ٢س - ٣ ≤ ١ ∴ ٢س ≤ ..... (بالقسمة على .....)

∴ س ≤ .....

∴ م.ح = ...

١- ٠ ١ ٢ ٣ ٤

تدريب (٣)

حل المتباينة ٨ - ٣س < -١ و مثل الحل على خط الأعداد

الحل

∵ ٨ - ٣س < -١ (بإضافة (.....) للطرفين)

∴ -٣س < .... (بالقسمة على .....)

∴ س ....

∴ م.ح = ...

١- ٠ ١ ٢ ٣ ٤



تدريب (٤)

حل المتباينة ٧س − ٨ > ٤س + ١ فى ح ومثل الحل على خط الأعداد

الحل

∵ ٧س − ٨ > ٤س + ١ (نجعل السينات فى طرف والأعداد فى طرف)

∴ ٧س ..... > ..... + ١

∴ .... > .... (بالقسمة على .....)

∴ س > .... ∴ م.ح = ...

-١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤

تدريب (٥)

حل المتباينة ٣ ≤ ٢س + ١ < ٧ فى ح ومثل الحل على خط الأعداد

الحل

∵ ٣ ≤ ٢س + ١ < ٧ (بإضافة (.....) إلى أطراف المتباينة الثلاثة)

∴ ٣ ..... ≤ ٢س + ١ ..... < ٧ .....

∴ .... ≤ ٢س < ..... (بالقسمة على .....)

∴ .... ≤ س < .....

∴ م.ح = ...

-١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥

تدريب (٦)

حل المتباينة −٤ + س < ٢س − ٣ < ١ + س فى ح ومثل الحل على خط الأعداد

الحل

∵ −٤ + س < ٢س − ٣ < ١ + س (بإضافة (.....) إلى أطراف المتباينة)

∴ −٤ + س ..... < ٢س − ٣ ..... < ١ + س .....

∴ −٤ < .... < ..... (بإضافة (.....) إلى أطراف المتباينة)

∴ −٤ ..... < .... < .....

∴ .... < س < .....

∴ م.ح = ...

-١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥

تمارين (٩) على حل المعادلات و المتباينات فى ح

أسئلة الوزارة

أولاً : راجع معنا واختبر نفسك — ١٠ — ⅓ ساعة امتحان ومراجعة

اختبار تراكمي (٧)

(١) (أ) أكمل كلاً مما يأتى :

① √٣٨ ينحصر بين العددين الصحيحين .... ، ....

② المساحة الجانبية لمتوازى مستطيلات محيط قاعدته ١٥ سم وارتفاعه ٢ سم = ...

③ أبسط صورة للمقدار √١٨ + ٣ ∛(١/٣) − √٨ − ∛٩ هى ....

④ [٢ ، ∞[− [−٢ ، ٣] = ...

٤ درجات

(ب) كرة من المعدن طول قطرها ٦ سم صهرت و حولت إلى اسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٣ سم احسب ارتفاع الأسطوانة

....

٣ درجات

(جـ) إذا كان س = √٣ − √٢ فأوجد قيمة (س + س^-١)^٢

....

٣ درجات



ثانياً : أجب عما يأتي :

مسائل المستوى الأول

[٢] أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد :

① ٥ س + ٦ = ١
② ٢ س + ٤ = ٣
③ ٢ س − ٣ = ٤
④ ٤ − ٢ س = ١٠
⑤ −٣ س − ١ = ٥
⑥ −٢ − ٣ س = ٧

---

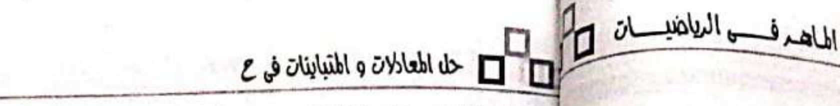
[٣] أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية في ح ومثل الحل على خط الأعداد :

① س < ٣
② س ≥ −٤
③ − س > ٢
④ ٢ س < ١
⑤ −٢ س < ٦
⑥ ٥ س ≤ ٣
⑦ س + ٢ < ٧
⑧ س + ٥ ≥ ١١
⑨ (وزارة) ٣ س − ١ < ١١
⑩ ٢ س − ١ ≤ ٩
⑪ (وزارة) ½ س + ١ ≤ ٢
⑫ ٤ − ٤ س < ١٦
⑬ ٣ س + ١ ≥ ٧
⑭ ٣ − ٢ س ≥ ١
⑮ ٤ − ٥ س ≤ −١
⑯ −٤ − ٦ س ≥ ٨
⑰ ٥ ≥ ٢ س + ٣
⑱ (وزارة) √س ≥ ٤

---

[٤] أكمل ما يأتي :

① مجموعة حل المعادلة ٢ س = ٣ في ص هي .... ، وفي ح هي ....
② مجموعة حل المعادلة س + √٢ = ٠ في ن هي .... ، وفي ح هي ....
③ إذا كانت مجموعة حل المعادلة أ س + ٢ = ٦ في ح هي {٢} فإن أ = ...
④ إذا كانت س + √٢ = ٤ فإن م.ح ⊂ مجموعة الأعداد ....
⑤ مجموعة حل المتباينة − س > ٣ في ح هي ....
⑥ مجموعة حل المتباينة س − ٢ ≥ ٠ في ح هي ....
⑦ مجموعة حل المتباينة ١ − س ≥ ٣ في ح هي ....
⑧ مجموعة حل المتباينة ٣ ≤ س < ٥ في ح هي ....
⑨ مجموعة حل المتباينة −٢ ≤ س + ١ < ٨ في ح هي ....
⑩ إذا كانت [−٤ ، ∞[هي مجموعة حل المتباينة − س ≤ ب فإن ب = ...



[٥] اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين فيما يأتي :

① مجموعة حل المعادلة ٢ س − ٣ = ٧ في ح هي ....
[{٤} أ، {١٠} أ، {٥} أ، ϕ]

② مجموعة حل المعادلة س − √٣ = ٢ √٣ في ن هي ....
[√٣ أ، ٣ √٣ أ، صفر أ، ϕ]

③ إذا كانت ٢ س − ١ = ١ فإن س ∌ ....
[ط أ، ص أ، ن أ، ح]

④ العنصر ٣ ينتمي إلى مجموعة حل المتباينة ....
[س > ٣ أ، س ≥ ٣ أ، س < ٣ أ، س + ٢ > ٣]

⑤ مجموعة حل المتباينة س > ٧ في ح هي ....
[ ]٧ ، ∞[أ، [−٧ ، ∞[أ، [٧ ، ∞[أ،]−∞ ، ٧[ ]

⑥ مجموعة حل المتباينة −١ < − س ≤ ١ في ح هي ....
[{(−١ ، ١)} أ، [−١ ، ١[أ، {−١ ، ١} أ،]−١ ، ١]]

⑦ إذا كانت س ∈ [−٢ ، ∞[فإن العبارة تمثل المتباينة ....
[س > −٢ أ، س ≥ −٢ أ، س < −٢ أ، س ≤ −٢]

⑧ إذا كانت س + ١ ≥ ٣ فإن س ∈ ....
[ ]٣ ، ∞[أ، [٣ ، ∞[أ، [−٢ ، ∞[أ، [٢ ، ∞[ ]

⑨ مجموعة حل المتباينة −١ ≤ س − ١ ≤ ١ في ح هي ....
[[−١ ، ١] أ، [٠ ، ٢] أ، [٠ ، ١] أ، [−١ ، ٢]]

مسائل المستوى الثاني

[٦] أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد :

① $\frac{2}{3}$ س − ٤ = ٢
② ٣ س − ٢ $\frac{1}{2}$ = ٦ $\frac{1}{2}$
③ $\frac{1}{2}$ س + ٥ $\frac{1}{4}$ = ٦ $\frac{1}{4}$
④ ٠,٢ س + ١,٤ = ١
⑤ ٢ (س + ٥) = ٦
⑥ ٣ (٢ − س) + ٨ = ١١
⑦ ٣ (٢ س − ١) = ١ + ٥ س
⑧ ٢ (س − ٣) = ٦ − ٢ س



٧ أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية و مثل الحل على خط الأعداد :

① √٢س − ١ = ١
② √٣س − ١ = ٢
③ √٢س − ٣ = −٥
④ ٤ − √٢س = ٢
⑤ ٢ − √٣س = ٥
⑥ √٥س − ١ = ٩

---

٨ أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية و مثل الحل على خط الأعداد :

① س − ١ = √٥
② س − ٢ = √٣
③ س + √٣ = ٢
④ س + √٢ = ١
⑤ س + √٢ = ٢√٢
⑥ √٢س − √٦ = √٢
⑦ ٢س − √٣ = ٣√٣
⑧ ٢(س + ١) = √١٢
⑨ ٢(١ − س) = √٢٠
⑩ ٢س + √٥ = س + ٢√٥

---

٩ أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية في ح و مثل الحل على خط الأعداد :

① ٣ < س + ٢ ≤ ٦]١،٤[
② −١ ≤ س + ١ < ٣ [-٢،٢[
③ ٠ < س − ٢ < ٣]٢،٥[
④ ١ < ٢س − ٣ ≤ ٧]٢،٥]
⑤ −٣ ≤ ٢س − ١ < ٧ [-١،٤[
⑥ −٥ < ٣س − ٢ ≤ ٤]-١،٢]
⑦ ٤ < ٣س + ١ ≤ ١٠ وهل ٢,٣ ∈ مجموعة الحل ؟]١،٣]
⑧ −٣ < ٢س + ١ < ٥]-٢،٢[
⑨ −٧ ≤ ٤س − ٣ < ٥ [-١،٢[
⑩ −١ < ١ − ٢س ≤ ٥ [-٢،١[
⑪ ∛−٨ ≤ س + ١ < √٩]-٣،٢[
⑫ |−٣| < ٢س − ١ < ٩]٢،٥[
⑬ −١١ < ٢س − ١ < ٩]-٥،٥[
⑭ ٥ < ٥ − ½ س < ٧]-٤،٠[

---

١٠ أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية في ح و مثل الحل على خط الأعداد :

① ٢س + ١ ≥ س + ٣ [٢،∞[
② ٣س + ٢ ≤ ٢س − ٥]-∞،-٧]
③ ٢س − ٣ < ٥س + ٩]-٤،∞[
④ ٣ − ٤س ≥ س − ٢]-∞،١]

⑤ ١ − س ≥ −٢س − ١ [-٢،∞[
⑥ ٢ + ٢س ≤ ٣س + ٣ < ٥ + ٢س [-١،٢[
⑦ س − ١ < ٣س − ١ ≤ س + ١]٠،١]
⑧ ٤س ≤ ٥س + ٢ < ٤س + ٣ [-٢،١[
⑨ ٥س + ٧ > ٦س > ٥س]٠،٧[
⑩ −س < س < ٤ − س]٠،٢[
⑪ ١١ + ٣س < ٥س + ٧ ≤ ١٩ + ٣س]٢،٦]
⑫ ٤ + س < ٤س − ٢ ≤ ٣س + ١]٢،٣]

مسائل المتفوقين

١١ أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية حيث س ∈ ح :

① (٦س − ٨)/٢ > ٢(٥س + ٤)/٣]-∞،-٢٠[
② (٣س + ٣)/٤ ≤ (س − ١)/٢ ≤ (٧ + ٣س)/٤ [-٩،-٥]
③ (٣س − ٤)/٦ ≤ س + ١/٣ < س/٢ − ١/٦ [-٢،-١[

---

١٢ إذا كان]٥،١٠[هي مجموعة حل المتباينة أ < س − ٢ < ب أوجد قيمة أ ، ب

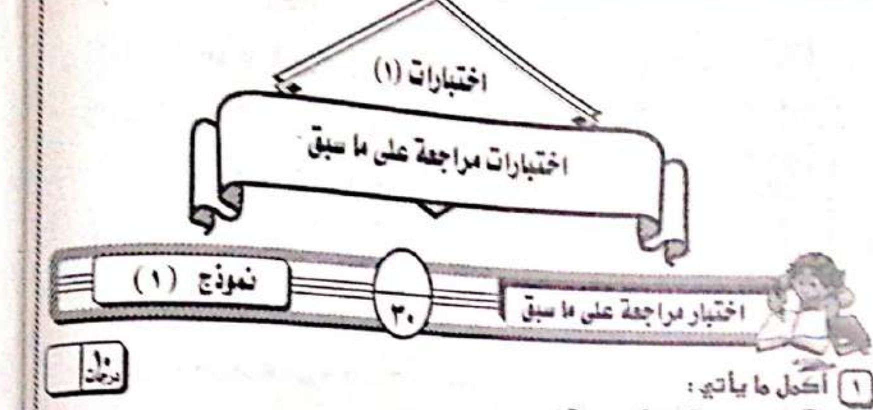
[أ=٣، ب=٨]

---

١٣ هل √٥ ينتمي لمجموعة حل أي متباينة مما يأتي مع الأثبات ؟

① ٥ ≤ ٣ − س < ٧
② ١ < س − ١ < ٢
③ (٣س − ٤)/٦ < س + ١/٣ < س/٢





١ أكمل ما يأتي : (١٠ درجات)

①]-١ ، ١] ∪ [١ ، ٥[= ....

② قيمة العدد $\sqrt{١١}$ لأقرب جزء من مائة هو ....

③ مجموعة حل المعادلة ٠٫٠٠١ س^{٣} = -٨ في ن هي ....

④ نصف قطر الكرة التي حجمها ٣٦ π سم^{٣} هو ....

⑤ إذا كانت س < $\sqrt{٧}$ < س + ١ حيث س ∈ ص فإن س = ...

٢ (١٠ درجات)

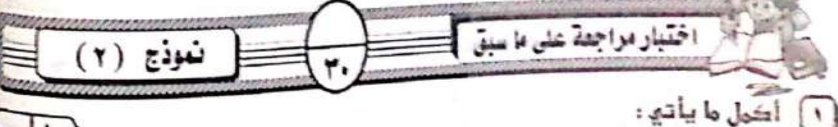
(أ) مثل العدد ١ + $\sqrt{٥}$ على خط الأعداد

(ب) إذا كانت س = ٢ - $\sqrt{٢}$ ، ص = ٢ + $\sqrt{٢}$

فأثبت أن س + ص = (س ص)^{٢}

٣ أوجد مجموعة الحل في ح لكل مما يأتي : (١٠ درجات)

① س + ٣ ≤ ٢ س ≤ س - ٢ ② ٢ - $\sqrt{٦}$ س = |-٨|



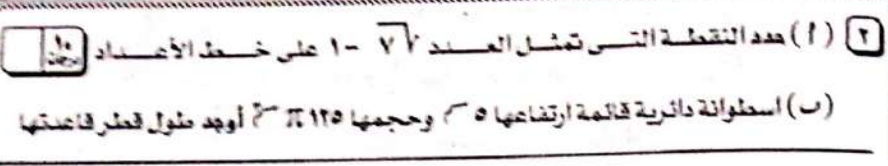
١ أكمل ما يأتي : (١٠ درجات)

①]-٣ ، ٤] ∩ [-١ ، ٥] = ...

② إذا كانت س < $\sqrt[٣]{٢٥}$ < س + ١ حيث س ∈ ص فإن س = ...

③ المقدار ٢ $\sqrt{٦}$ - ٣ $\sqrt{\frac{٢}{٣}}$ + $\sqrt{٥٤}$ في أبسط صورة هو ....

④ مجموعة حل المتباينة ٥ ≤ ٢ س + ٣ في ح هي ....



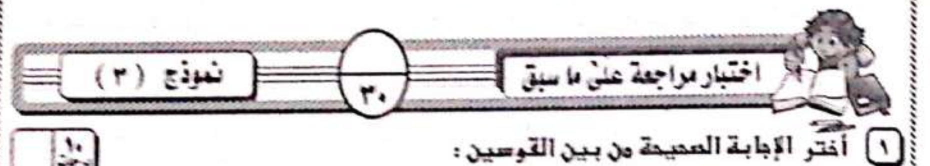
٢ (أ) حدد النقطة التي تمثل العدد $\sqrt{٧}$ - ١ على خط الأعداد (١٠ درجات)

(ب) أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٥ سم وحجمها ١٢٥ π سم^{٣} أوجد طول قطر قاعدتها

٣ (أ) أوجد مجموعة حل المعادلة $\sqrt{٥}$ س - ١ = ٤ ومثل الحل على خط الأعداد (١٠ درجات)

(ب) إذا كانت س = $\sqrt{٥}$ - $\sqrt{٣}$ ، ص = $\frac{٢}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}}$

فأوجد قيمة س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}



١ أختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين : (١٠ درجات)

① $\sqrt{٣}$ ∈ .... [[٣ ، ٤] أ]٠ ، ١[أ]١ ، ٢[أ]٢ ، ٣[ ]

② إذا كانت س ∈ [-٢ ، ٢] فإن س^{٢} ∈ ....

[[-٤ ، ٤] أ [٠ ، ٢] أ [٠ ، ٤] أ [-٤ ، ٠]]

③ إذا كانت المساحة الكلية للمكعب ٩٦ سم^{٢} فإن مساحة الوجه الواحد = ...

[٢٤ سم^{٢} أ ١٦ سم^{٢} أ ١٦ سم^{٣} أ ٤٨ سم^{٢}]

④ مجموعة حل المتباينة -١ ≤ ٢ س - ١ ≤ ٣ في ح هي ....

[[-١ ، ١] أ [٠ ، ٢] أ [٠ ، ١] أ [-١ ، ٢]]

⑤ $\sqrt{٢٥}$ = $\sqrt[٣]{..........}$ [٥ أ ١٥ أ ١٢٥ أ -٥]

٢ (أ) أوجد مستعينا بخط الأعداد]-∞ ، ٢] ∪ [٣ ، ∞[(١٠ درجات)

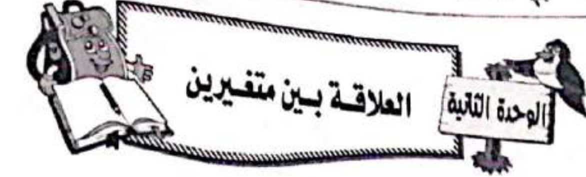
(ب) إذا كانت س = $\sqrt{٣}$ - $\sqrt{٢}$ ، ص = $\sqrt{٣}$ + $\sqrt{٢}$

فأوجد قيمة س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}

٣ (أ) أوجد مجموعة حل المتباينة ٢ س + ١ > ٤ س - ٣ > ٢ س - ١١ (١٠ درجات)

(ب) أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٩٢٤ سم^{٣} وارتفاعها ٦ سم أوجد مساحتها الكلية





إذا فرضنا أن مدرسة مشتركة قررت عمل رحلة علمية يكون عدد المشاركين فيها ٢٠ و كان عدد البنات = س و عدد البنين = ص فإن س + ص = ٢٠

أى أن عدد البنات + عدد البنين = ٢٠ ، و نلاحظ أنه كلما تغير عدد البنات يتغير عدد البنين فيمكن أن يكون عدد البنات (س) = ١٠ و عدد البنين (ص) = ١٠ أى أن ١٠ + ١٠ = ٢٠ أو عدد البنات = ٦ و عدد البنين = ١٤ فيكون المجموع ٢٠ ، أو عدد البنات = ٩ فيكون عدد البنين = ١١

لذلك نقول أن هناك علاقة بين عدد البنات و عدد البنين فكلما تغير عدد البنات يتغير عدد البنين و العكس صحيح كلما تغير عدد البنين يتغير عدد البنات بحيث يكون مجموعهما ٢٠

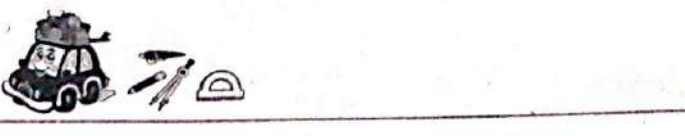
و نلاحظ أنه يوجد عددين يتغير أحدهما فيتغير الآخر و هما س ، ص لذلك يسميان " متغيرين " و تسمى العلاقة بينهما " العلاقة بين متغيرين "

> و الصورة العامة للعلاقة بين متغيرين س ، ص تكون على الصورة
>
> **أ س + ب ص = جـ** حيث أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠
>
> و تسمى علاقة خطية بين المتغيرين س ، ص و تمثل بيانياً بخط مستقيم

و يمكن إيجاد مجموعة من الأزواج المرتبة (س ، ص) تحقق العلاقة

فمثلاً : فى العلاقة السابقة بين عدد البنات و عدد البنين حيث س + ص = ٢٠ فإننا يمكن إيجاد بعض الأزواج المرتبة التى تحقق العلاقة مثل (١٠ ، ١٠) ، (٦ ، ١٤) ، (٩ ، ١١) ، (٥ ، ١٥)

و نلاحظ أن كل زوج مرتب يكون مجموع س + ص فيه يساوى ٢٠



ملاحظات

- أى زوج مرتب من الأعداد الحقيقية يحقق العلاقة الخطية (يجعلها عبارة صحيحة أى يجعل طرفها الأيمن = طرفها الأيسر) يعتبر حلاً لهذه العلاقة
- العلاقة بين متغيرين (مجهولين) لها عدد لا نهائى من الأزواج المرتبة التى تحقق العلاقة و لتمثيل العلاقة بين متغيرين بيانياً فإننا نأخذ زوجين مرتبين يحققان العلاقة ونمثلهما بنقطتين فى مستوى ديكارتى ثم نرسم مستقيم يمر بهاتين النقطتين فيكون المستقيم هو التمثيل البيانى لها، ونوجد زوجاً مرتباً ثالثاً للتأكد من صحة التمثيل
- كل نقطة ∋ الخط المستقيم الممثل للعلاقة يمثلها زوج مرتب يحقق العلاقة
- الخط المستقيم الممثل للعلاقة أ س + ب ص = جـ يمر بنقطة الأصل إذا كان جـ = ٠
- إذا كانت أ = ٠ فإن العلاقة تصبح على الصورة ب ص = جـ و يمثلها مستقيم يوازى محور السينات
- إذا كانت ب = ٠ فإن العلاقة تصبح على الصورة أ س = جـ و يمثلها مستقيم يوازى محور الصادات .
- العلاقة ص = ٠ يمثلها محور السينات
- العلاقة س = ٠ يمثلها محور الصادات

أمثلة توضيحية

مثال ١ **أوجد** أربعة أزواج مرتبة تحقق العلاقة س + ص = ٣ و **مثلها** بيانياً

الحل

لسهولة إيجاد الأزواج المرتبة التى تحقق العلاقة نجعل ص فى طرف و باقى حدود العلاقة فى الطرف الآخر لتكون فى صورة يسهل التعويض فيها

∵ س + ص = ٣ ∴ ص = ٣ − س

ثم نعوض عن س بعدة أرقام لنوجد قيمة ص فى العلاقة فى صورتها الجديدة

∴ عندما س = ٠ ∴ ص = ٣ - ٠ = ٣ ∴ (٠ ، ٣) يحقق العلاقة

عندما س = ١ ∴ ص = ٣ - ١ = ٢ ∴ (١ ، ٢) يحقق العلاقة

عندما س = ٢ ∴ ص = ٣ - ٢ = ١ ∴ (٢ ، ١) يحقق العلاقة

عندما س = ٣ ∴ ص = ٣ - ٣ = ٠ ∴ (٣ ، ٠) يحقق العلاقة

ثم نرسم محوري الإحداثيات في المستوى الديكارتي و نمثل عليه الأزواج المرتبة بنقط كما بالشكل و نصل بين النقط بخط مستقيم فيكون هو التمثيل البياني للعلاقة

مثال ٢ مثل بيانياً العلاقة س + ٢ ص = ٥

الحل

ملاحظة: يمكن إيجاد حلين للمعادلة بالتعويض عن س = ٠ و إيجاد قيمة ص ثم التعويض عن ص = ٠ و إيجاد قيمة س

لسهولة الحل نجعل س في طرف و ص في طرف ثم نعوض في أحدهما لايجاد الأخر ويفضل أن يكون المتغير الذي معامله ١ في الطرف الأيمن

∵ س + ٢ ص = ٥ ∴ س = ٥ - ٢ ص

عندما ص = ٠ ∴ س = ٥ - ٢ × ٠ = ٥

عندما ص = ١ فإن س = ٥ - ٢ × ١ = ٣

عندما ص = ٢ فإن س = ٥ - ٢ × ٢ = ١

و يمكن وضع الحلول الثلاثة في جدول

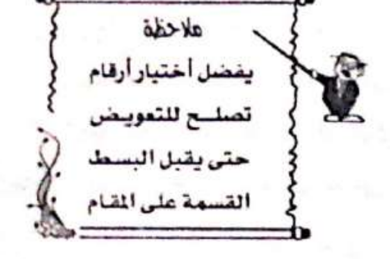
س	٥	٣	١
ص	٠	١	٢

ملاحظة: الخط المستقيم يمر بنقطة الأصل إذا كان الحد المطلق يساوي صفر أي إذا كان س + ٢ ص = صفر



مثال ٣ مثل بيانياً المستقيم الذي يمثل العلاقة ٢ س + ٣ ص = ١٢ ، وإذا كان هذا المستقيم يقطع محور السينات في النقطة أ، و يقطع محور الصادات في النقطة ب فأوجد مساحة Δ أ و ب حيث و هي نقطة الأصل

الحل



لسهولة إيجاد الحلول نكتب المعادلة في صورة يسهل التعويض فيها

∵ ٢ س + ٣ ص = ١٢

∴ ٢ س = ١٢ - ٣ ص (بالقسمة على ٢)

∴ $س = \frac{١٢ - ٣ص}{٢}$ أو $س = ٦ - \frac{٣}{٢} ص$ (يفضل التعويض عن ص بعدد زوجي)

باخذ ص = ٠ ∴ $س = \frac{١٢ - ٣ \times ٠}{٢} = ٦$ ∴ (٦ ، ٠) تحقق العلاقة

باخذ ص = ٢ ∴ $س = \frac{١٢ - ٣ \times ٢}{٢} = ٣$ ∴ (٣ ، ٢) تحقق العلاقة

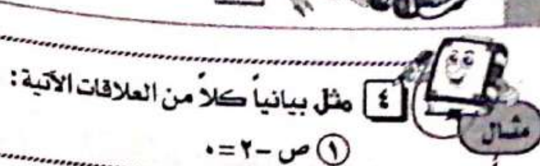
باخذ ص = ٤ ∴ $س = \frac{١٢ - ٣ \times ٤}{٢} = ٠$ ∴ (٠ ، ٤) تحقق العلاقة

ثم نمثل هذه الأزواج المرتبة و نصل بينها بخط مستقيم فيكون هو الخط المستقيم الممثل للعلاقة و نلاحظ أن المثلث أ و ب قائم الزاوية في و

∵ مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الأرتفاع

∴ مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٤ = ١٢ وحدة مربعة





٤ مثل بيانياً كلاً من العلاقات الآتية :

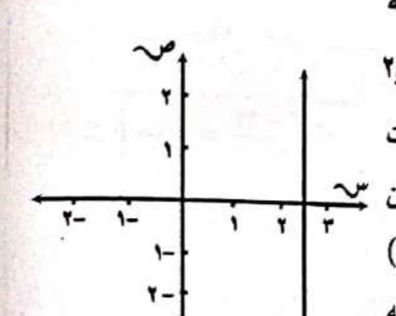
(١) ص − ٢ = ٠ (٢) ٢س = ٥

الحل

(١) ∵ ص − ٢ = ٠ ∴ ص = ٢

العلاقة يمثلها خط مستقيم يوازى محور السينات ويبعد عنه مسافة ٢ وحدة فوق محور السينات ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٢)

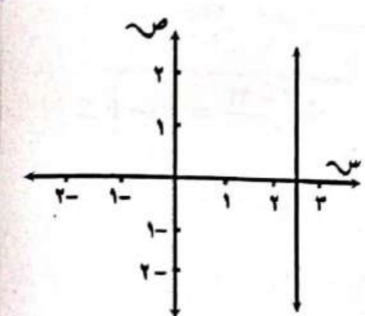
لاحظ أن : العلاقة ص = ٠ يمثلها محور السينات نفسه

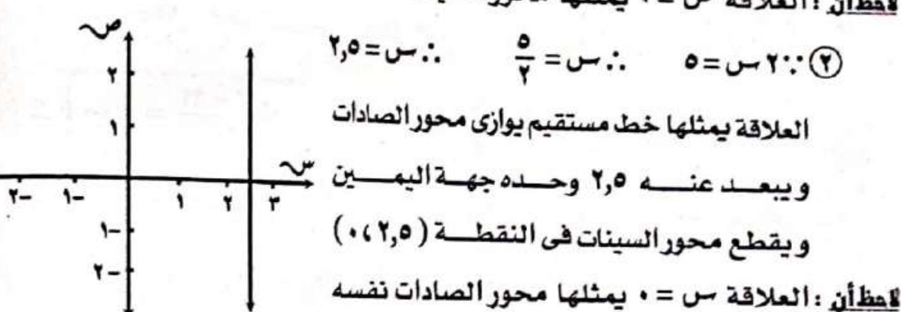


(٢) ∵ ٢س = ٥ ∴ س = $\frac{5}{2}$ ∴ س = ٢,٥

العلاقة يمثلها خط مستقيم يوازى محور الصادات ويبعد عنه ٢,٥ وحده جهة اليمين ويقطع محور السينات فى النقطة (٢,٥ ، ٠)

لاحظ أن : العلاقة س = ٠ يمثلها محور الصادات نفسه





مثال ٥ بين أى من الأزواج المرتبة الآتية يحقق العلاقة س + ص = −٤ :

(١) (٣ ، ١) (٢) (−٣ ، −١) (٣) (−١ ، ٣) (٤) (١ ، −٣)

الحل

(١) بالتعويض عن س = ٣ ، ص = ١ فى الطرف الأيمن للعلاقة

∴ الطرف الأيمن = ٣ + ١ = ٤ وحيث انه ≠ الطرف الأيسر

∴ (٣ ، ١) لا يحقق العلاقة

ونكرر العمل السابق مع كل زوج مرتب فنجد أن :

(٢) (−٣) + (−١) = −٤ ∴ (−٣ ، −١) يحقق العلاقة

(٣) (−١) + ٣ = ٢ ∴ (−١ ، ٣) لا يحقق العلاقة

(٤) ١ + (−٣) = −٢ ∴ (١ ، −٣) لا يحقق العلاقة



مثال ٦ إذا كان (٢ ، أ) يحقق العلاقة ٣س + ص = ٧ فأوجد قيمة أ

الحل

∵ (٢ ، أ) يحقق العلاقة ∴ نعوض عن س = ٢ ، ص = أ فى العلاقة

∴ ٣ × ٢ + أ = ٧ ∴ ٦ + أ = ٧

∴ أ = ٧ − ٦ ∴ أ = ١

أمثلة للتدريب

تدريب (١)

مثل بيانياً العلاقة ص = س + ١

الحل

عندما س = ٠ ∴ ص = ...

عندما س = ١ ∴ ص = ...

عندما س = ٢ ∴ ص = ...

س			
ص			

تدريب (٢)

مثل بيانياً العلاقة ص + س = ٣

الحل

عندما س = ... ∴ ...... = ...

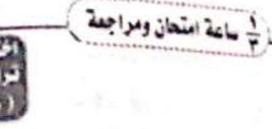
....

....



تمارين (١٠) على العلاقة بين متغيرين

اسئلة الوزارة



اختبار تراكمى (٨)

أولاً : راجع معنا و اختبر نفسك

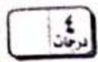
١ (أ) أكمل ما يأتى :

① إذا كان أ =]−∞ ، ٢[، ب = [−٢ ، ٤] فإن أ ∩ ب = ... ، ب − أ = ...

② √٥٠ − √١٨ − √٨ = ...

③ إذا كان س < √١٣ < س + ١ ، س ∈ ص فإن س = ...

④ (√٣ + ٢)^٣ (√٣ − ٢)^٣ = ...



٤ درجات

(ب) عين النقطة التى تمثل العدد √٥ على خط الأعداد

....

٣ درجات

(جـ) اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ١٠ سم و حجمها ١٥٤٠ سم³
أوجد مساحتها الكلية

....

٣ درجات

ثانياً : أجب عما يأتى :

مسائل المستوى الأول

٢ أوجد أربعة أزواج مرتبة تحقق كلاً من العلاقات الآتية و مثلها بيانياً :

① س + ص = ٣ ② س − ص = ٤

③ ص − ٥ = س ④ س + ٣ = ص

⑤ س − ص = ٠ ⑥ س + ص = ٠

⑦ س − ص − ٢ = ٠ ⑧ س + ص + ٤ = ٠

---

٣ أكمل كل مما يأتى :

① إذا كان (−٢ ، أ) يحقق العلاقة ص − س − ٤ = صفر فإن أ = ...

② إذا كان الزوج المرتب (٣ ، −١) يحقق العلاقة س + ٢ ص = جـ فإن جـ = ...

③ إذا كان (١ ، أ) يحقق العلاقة ٢ س + ص = ٢ فإن أ = ...

④ إذا كان الزوج المرتب (٠ ، ب) يحقق العلاقة س + ص = ٢ فإن ب = ...

⑤ أحد الأزواج المرتبة التى تحقق العلاقة س + ص = ٥ هو (٢ ، ......)

⑥ الزوجان المرتبان (٠ ، ......) ، (...... ، ٠) يحققان العلاقة ٣ س − ٤ ص = ١٢

⑦ العلاقة ٣ س + ٢ ص = جـ يمثلها بيانياً خط مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠) عندما جـ = ...

⑧ الأزواج المرتبة (١ ، ......) ، (...... ، ١) تحقق العلاقة ٢ س − ٣ ص = ٥

⑨ العلاقة ٢ س + ٥ ص = ٧ لها عدد .... من الأزواج المرتبة التى تحققها

⑩ الشكل البيانى الذى يمثل العلاقة س = ٣ هو خط مستقيم يوازى محور .... ويبعد عنه بمقدار .... وحدة طول

⑪ الخط المستقيم الممثل للعلاقة ص − ٢ = ٠ يوازى محور .... و يبعد عنه ....

⑫ التمثيل البيانى للعلاقة التى على الصورة أ ص = ب هو خط مستقيم يوازى محور ....

⑬ العلاقة أ س + ب ص = ٠ تمثل بيانياً بخط مستقيم يمر بالنقطة (...... ، ......)

⑭ إذا كان (ك ، ٢ ك) يحقق العلاقة س + ص = ١٥ فإن ك = ...

⑮ المستقيم الممثل للعلاقة ص = س - ٣ يقطع محور السينات فى النقطة ....

④ اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس واكتبها فى كراسة أجابتك :

① أى الأزواج المرتبة التالية يحقق العلاقة ٢ س + ص = ٥ ؟

[(-١ ، ٣) أ (٢ ، ٢) أ (٣ ، ١) أ (١ ، ٣)]

② العلاقة ص + ٢ س = ٥ يمثلها مستقيماً يمر بالنقطة ....

[(٠ ، ٥) أ (٥ ، ٠) أ (٢ ، ٣) أ (٣ ، ٢)]

③ إذا كانت النقطة (أ ، ٠) تحقق العلاقة ٢ س - ص = ٤ فإن قيمة أ = ...

[١ أ ٢ أ -٢ أ -٣]

④ العلاقة س - ص = ٥ تمثل بيانياً ب ....

[مثلث أ نقطة أ خط مستقيم أ منحنى]

⑤ العلاقة س + ٣ ص - ٢ = ٠ يحققها الزوج المرتب ....

[(٠ ، ٠) أ (٥ ، -١) أ (٢ ، ١) أ (١ ، -١)]

⑥ العلاقة $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٢}$ - ١ = ٠ يحققها الزوج المرتب ....

[(٠ ، ٠) أ (١ ، ٣) أ (-١ ، ١) أ (١ ، ١)]

⑦ العلاقة س - ٣ ص = ٠ يحققها الزوج المرتب ....

[(٠ ، هـ) أ (-هـ ، ٣هـ) أ (هـ ، ٣هـ) أ (هـ ، -٣هـ)]

⑧ عدد الأزواج المرتبة التى تحقق العلاقة س + ص = ٢ هو ....

[١ أ ٢ أ صفر أ عدد لا نهائى]

⑨ إذا كان (٠ ، ب) يحقق العلاقة ٥ س = ٣ (ص - ٤) فإن ب = ...

[صفر أ ٣ أ ٤ أ ٥]

⑩ أحد الأزواج المرتبة التى تحقق العلاقة س + $\frac{١}{٢}$ ص = ٧ هو ....

[(٣ ، ٢) أ (٢ ، ٤) أ (٣ ، ٤) أ (٤ ، ٦)]

⑪ إذا كانت النقطة (٢ ، ٣) تنتمى للمستقيم الممثل للعلاقة س - ٢ ص + هـ = ٠

فإن هـ = ... [٨ أ -٨ أ -٤ أ ٤]

⑫ المستقيم الممثل للعلاقة : ٢ س + ص = ٣ ....

[يوازى محور السينات أ يوازى محور الصادات أ يقطع المحورين أ غير ذلك]

⑬ العلاقة ٣ س + ٨ ص = ٢٤ يمثلها مستقيم يقطع محور الصادات فى النقطة .... [(٠ ، ٨) أ (٨ ، ٠) أ (٠ ، ٣) أ (٣ ، ٠)]

⑭ (٣ ، ٢) لا تحقق العلاقة ....

[ص + س = ٥ أ ٣ ص - س = ٣ أ ص + س = ٧ أ ص - س = ١]

⑮ الجدول الآتى يبين علاقة س ، ص وهى ....

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	١	٣	٥	٧	٩

[ص = س + ٤ أ ص = س + ١ أ ص = ٢ س - ١ أ ص = ٣ س - ٢]



⑤ باستخدام العلاقة الخطية أكمل الجدول فيما يأتى :

① ص = ٢ س + ١

س	٢	٠	-١
ص			

② س - ص = ٥

س	١		٥
ص		٣	



(٦) مثل بيانياً كلاً من العلاقات الآتية :

(١) ٢ س + ص = ٥
(٢) س + ٢ ص = ٦
(٣) س - ٢ ص = ٥
(٤) ص - ٢ س = ٠
(٥) ٢ س - ص = ٣
(٦) ٣ س + ٣ ص = ٩
(٧) س + ٣ ص + ٢ = ٠
(٨) ٣ س - ص = ٣

---

(٧) مثل بيانياً كلاً من العلاقات الآتية :

(١) ٢ س + ٣ ص = ٦
(٢) ٢ س + ٣ ص = ١٢
(٣) ٢ س + ٣ ص = -١
(٤) س + $\frac{ص}{٢}$ = -٢
(٥) ص = $\frac{١}{٢}$ س - ١
(٦) $\frac{٢س - ص}{٣}$ = ٤

---

(٨) مثل بيانياً كلاً من العلاقات الآتية :

(١) ص = ٢
(٢) س = ١
(٣) ص - ٣ = ٠
(٤) س + ٣ = ٠
(٥) ٢ س = ٤
(٦) ٢ ص = ٧

---

(٩) إذا كان (-٣ ، ٢) يحقق العلاقة ٣ س + ب ص = ١ **فأوجد قيمة ب** [٥]

---

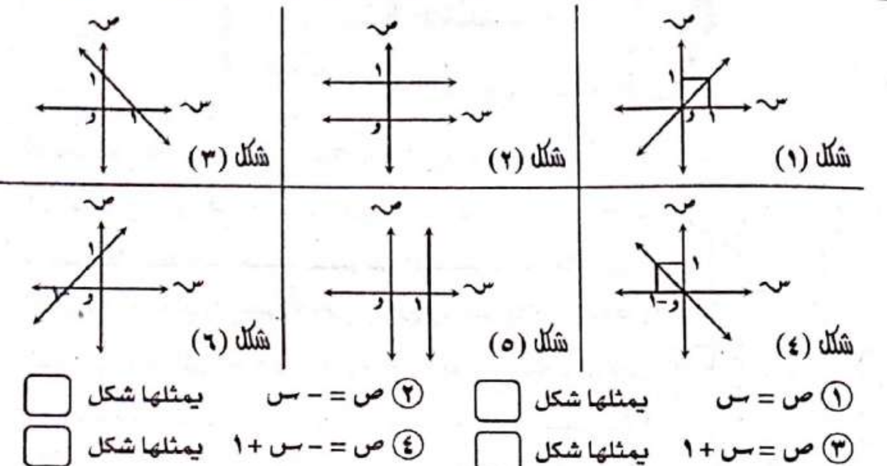
(١٠) إذا كان (٢ ، ١) يحقق العلاقة ص - ٢ س = أ **فأوجد قيمة أ** [-٣]

---

(١١) **مثل المستقيم الذى يمثل العلاقة** ٢ س + ٣ ص = ٦ و إذا كان هذا المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة أ ويقطع محور الصادات فى النقطة ب **فأوجد مساحة المثلث** و أ ب حيث نقطة و هى نقطة الأصل [٣ وحدات مربعة]



(١٢) تأمل الأشكال الآتية وضع الإجابة الصحيحة داخل المربعات الخالية :



(١) ص = س يمثلها شكل ☐
(٢) ص = - س يمثلها شكل ☐
(٣) ص = س + ١ يمثلها شكل ☐
(٤) ص = - س + ١ يمثلها شكل ☐
(٥) ص = ١ يمثلها شكل ☐
(٦) س = ١ يمثلها شكل ☐

مسائل المتفوقين

(١٣) مع عصام ١٠ ورقات مالية فئة ٥ جنيهات و أوراق مالية فئة ٢٠ جنيهاً اشترى عصام من المركز التجارى بما قيمته ٦٥ جنيهاً **حدد الأمكانات المختلفة لدفع هذا المبلغ باستخدام الأوراق المالية التى معه و أوجد العلاقة بين عدد كل منها و مثل النقط التى تحقق هذه العلاقة بيانياً**

---

(١٤) إذا كان ثمن طاولة الكمبيوتر ١٠٠ جنيه و ثمن الكرسى ٥٠ جنيهاً فإذا باع المتجر فى أحد الأسابيع بمبلغ ٥٠٠ جنيه ، **فما هى التوقعات الممثلة لعدد الطاولات التى باعها و عدد الكراسى ؟ مثل هذه التوقعات بيانياً**

---

(١٥) **أوجد قيمة أ ، ب** اللتين تجعلان (٢ ، أ) ، (أ + ب ، أ - ب) يحققان العلاقة ٤ س + ص = -٥ [-١٣ ، ٢٠]

---

(١٦) إذا كان المستقيم الممثل للعلاقة ص = ٢ س - أ يقطع محور السينات فى النقطة (١ ، ب) **فأوجد قيمتى أ ، ب** [٢ ، ٠]



ميـل الخـط المستقيـم

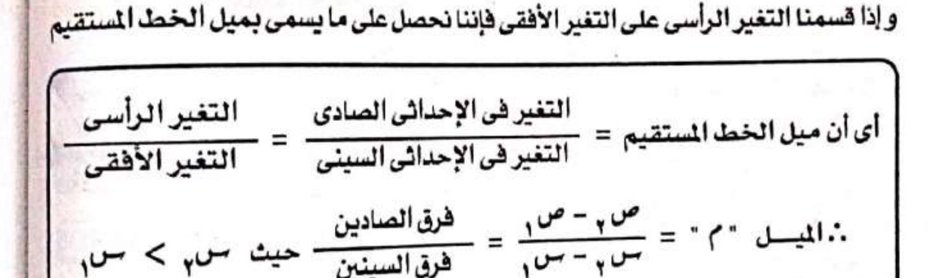
إذا تحركت نقطة على خط مستقيم من موضع أ $(س_1 ، ص_1)$ إلى موضع آخر ب $(س_2 ، ص_2)$ حيث $س_2 > س_1$ فإننا نلاحظ أنه حدث تغير فى الإحداثيات ونجد أن :

التغير فى الإحداثى السينى = $س_2 - س_1$ ويسمى بالتغير الأفقى

التغير فى الإحداثى الصادى = $ص_2 - ص_1$ ويسمى بالتغير الرأسى

(وهو يكون موجباً أو سالباً أو صفراً)

و إذا قسمنا التغير الرأسى على التغير الأفقى فإننا نحصل على ما يسمى بميل الخط المستقيم

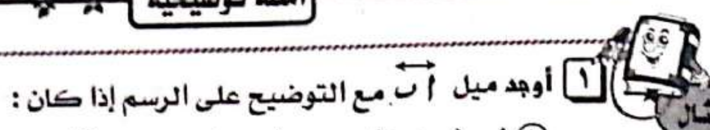


أى أن ميل الخط المستقيم = $\frac{\text{التغير فى الإحداثى الصادى}}{\text{التغير فى الإحداثى السينى}} = \frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}}$

∴ الميل "م" = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{\text{فرق الصادين}}{\text{فرق السينين}}$ حيث $س_2 > س_1$

ملاحظات

- إذا كان الميل = عدد موجب يكون شكل الخط المستقيم ↗ (يميل إلى اليمين)
- إذا كان الميل = عدد سالب يكون شكل الخط المستقيم ↖ (يميل إلى اليسار)
- إذا كان الميل = صفر يكون الخط المستقيم أفقى موازياً لمحور السينات
- إذا كان $س_2 - س_1$ = صفر يكون الخط المستقيم رأسى موازياً لمحور الصادات و نقول أن الميل غير معرف لأننا لا نستطيع حساب الميل إلا فى حالة وجود تغير فى الإحداثى السينى
- ميل الخط المستقيم ثابت لأى نقطتين عليه و يستخدم ذلك لأثبات أن ثلاث نقط على استقامة واحدة



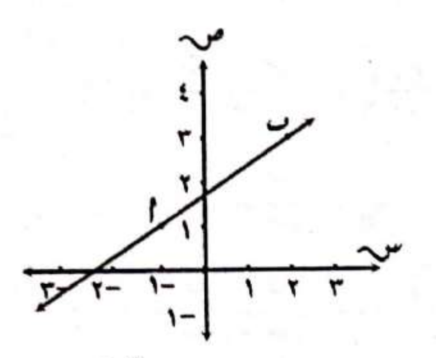
مثال ١ أوجد ميل $\overleftrightarrow{أب}$ مع التوضيح على الرسم إذا كان :

① أ = (−١، ١) ، ب = (٢، ٣)　　② أ = (٠، ٢) ، ب = (٢، ١)

الحل

① ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

$= \frac{٣ - ١}{٢ - (−١)} = \frac{٢}{٣}$



لاحظ أن : المستقيم يصعد لأعلى كلما اتجهنا من اليسار إلى اليمين

② ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{١ - ٢}{٢ - ٠} = \frac{-١}{٢}$

لاحظ أن : المستقيم يهبط لأسفل كلما اتجهنا من اليسار إلى اليمين

مثال ٢ أوجد ميل كل من :

① المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٢)
② المستقيم المار بالنقطتين (١ ، −٣) ، (٤ ، −٥)
③ المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٤) ، (٦ ، ٤)
④ المستقيم المار بنقطة الأصل و بالنقطة (٢ ، ٧)
⑤ المستقيم الذى يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، −٣) و محور السينات فى النقطة (−٢ ، ٠)
⑥ المستقيم المار بالنقطتين (٦ ، ٣) ، (٦ ، ١)



الحل

① $م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٤ - ٢}{٢ - ٣} = \frac{٢}{-١} = -٢$

② $م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-٣ - (-٥)}{١ - ٤} = \frac{٢}{-٣} = -\frac{٢}{٣}$

③ $م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٤ - ٤}{٩ - ٣} = \frac{٠}{٦} =$ صفر (مستقيم أفقي)

④ $م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٧ - ٠}{٢ - ٠} = \frac{٧}{٢}$

⑤ $م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-٣ - ٠}{٠ - (-٢)} = \frac{-٣}{٢}$

⑥ $م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ١}{٦ - ٦} = \frac{٢}{٠}$ غير معرف (مستقيم رأسي)

مثال ③ أثبت أن النقط أ (٠ ، ٣) ، ب (١ ، ٥) ، جـ (−١ ، ١) تقع على استقامة واحدة

الحل

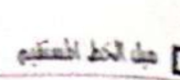
لكي تكون النقط أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة يجب أن يكون :

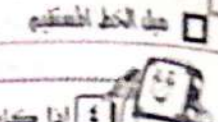
ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$

ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٥ - ٣}{١ - ٠} = \frac{٢}{١} = \boxed{٢}$ ، ميل $\overleftrightarrow{بجـ} = \frac{١ - ٥}{-١ - ١} = \frac{-٤}{-٢} = \boxed{٢}$

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$ وهما مشتركان في النقطة ب

∴ النقط أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة





مثال ④ إذا كان الخط المستقيم الذي يحتوي النقطتين (١ ، ٣) ، (س ، ٠) ميله = $\frac{٣}{٢}$ فأوجد قيمة س

الحل

$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ ∴ $\frac{٣}{٢} = \frac{٠ - ٣}{س - ١}$

∴ ٣س − ٣ = −٦ ∴ ٣س = −٦ + ٣

∴ ٣س = −٣ ∴ س = −١



أمثلة للتدريب

تدريب (١)

أكمل لإيجاد ميل المستقيم المار بكل نقطتين في كل مما يأتي :

① أ (١ ، ٢) ، ب (٣ ، ٥) ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{.........}{.........}$ = ...

② جـ (٣ ، −٢) ، د (٤ ، ١) ميل $\overleftrightarrow{جـد}$ = $\frac{.........}{.........}$ = ...

③ هـ (٣ ، ٤) ، و (٠ ، ٠) ميل $\overleftrightarrow{هـو}$ = $\frac{.........}{.........}$ = ...



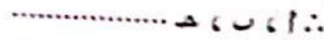
تدريب (٢)

أكمل ما يأتي لإثبات أن النقط أ = (٠ ، −٤) ، ب = (١ ، −٢) ، جـ = (٣ ، ٢) على استقامة واحدة

ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{.........}{.........}$ = ...

ميل المستقيم $\overleftrightarrow{بجـ} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{.........}{.........}$ = ...

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ... وهما مشتركان في ....

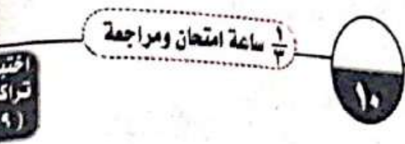


∴ أ ، ب ، جـ ....



تمارين (١١) على ميل الخط المستقيم

أسئلة الوزارة



أولاً : راجع معنا و اختبر نفسك

اختبار تراكمى (٩)

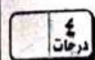
(١) (أ) أكمل ما يأتى :

① مجموعة حل المعادلة −٣ ≤ −س < ٢ فى ح هى ....

② حجم الكرة التى طول نصف قطرها ٣ سم هو ....

③ [−١ ، ٤] −]−١ ، ٤[= ....

④ ∛٨١ + √١٢ − ٢∛٣ − ٢√٣ فى أبسط صورة هى ....



(ب) إذا كان س = √٣ + √٢ ، ص = $\frac{١}{√٣ + √٢}$

فأوجد قيمة س² + ٢ س ص + ص²

....

....

....

....

....

٣ درجات

(جـ) كرة من المعدن طول نصف قطرها ١٦,٨ سم صهرت و صنع من مادتها المنصهرة ٤ كرات متساوية الحجم أوجد طول نصف قطر كل كرة

....

....

....

....

....





ثانياً : أجب عما يأتى :



(٢) أوجد ميل المستقيم المار بكل زوج من النقط التالية :

① (١ ، ٣) ، (٢ ، ١) ② (١ ، ١) ، (−٢ ، ٣) ③ (٣ ، ٤) ، (٥ ، ٦)

④ (−٤ ، ٣) ، (٢ ، −٥) ⑤ (١ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ⑥ (٥ ، ١) ، (١ ، ٥)

⑦ (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٥) ⑧ (٣ ، ٢) ، (٥ ، ٧) ⑨ (٦ ، ١) ، (٧ ، ٣)

(٣) أكمل كل مما يأتى :

① ميل الخط المستقيم = ...

② إذا كانت أ = (٢ ، ١) ، ب = (٣ ، ٤) فإن ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ...

③ إذا كان أ = (١ ، ٣) ، ب = (٢ ، ١) فإن ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ...

④ أى مستقيم يوازى محور السينات ميله = ...

⑤ أى مستقيم يوازى محور الصادات ميله ....

⑥ إذا كانت أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة فإن ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل ....

(٤) أوجد ميل كلاً من :

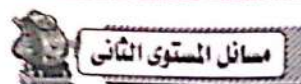
① المستقيم المار بالنقطتين أ (٢ ، −٥) ، ب (٤ ، −٣) [١]

② المستقيم المار بالنقطتين هـ (٣ ، −٨) ، ء (٢ ، −٨) [٠]

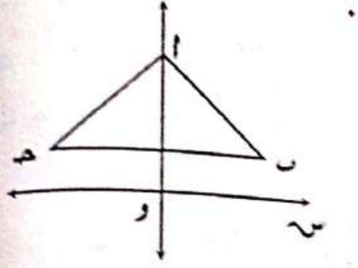
③ المستقيم المار بنقطة الأصل و النقطة (٣ ، ١) [⅓]

④ المستقيم الذى يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٦) و يقطع محور السينات فى النقطة (−٣ ، ٠) [٢]





⑤ في الشكل المقابل :



أ ب هـ مثلث

أكمل ما يأتى باستخدام أحد الكلمات

(موجب أو سالب أو صفر أو غير معرف)

① ميل $\overleftrightarrow{أب}$ .... ② ميل $\overleftrightarrow{ب هـ}$ ....

③ ميل $\overleftrightarrow{أو}$ .... ④ ميل $\overleftrightarrow{أهـ}$ ....

---

⑥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

① المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، ٤) ، (٥ ، ٣) ....

[أفقى أو رأسى أو يمر بنقطة الأصل أو غير ذلك]

② إذا كانت النقطة (٢ ، ٢) تقع على المستقيم الذى ميله = ٢

فإن النقطة التى تقع على نفس المستقيم هى ....

[(١ ، ٤) أو (٣ ، ٤) أو (٤ ، ١) أو (٤ ، ٤)]

③ إذا كان ميل المستقيم الذى يحتوى النقطتين (١ ، ٢) ، (٣ ، ص) يساوى ٢

فإن ص = ... [٣ ، أو ٦ أو ٧ أو -٧]

④ مستقيم يمر بالنقطتين (٠ ، ١) ، (٣ ، ٠) فإن ميله = ...

[$\frac{١}{٣}$ أو ٣ أو صفر أو $-\frac{١}{٣}$]

⑤ ميل أى خط مستقيم أفقى يكون ....

[عدد سالب أو عدد موجب أو صفر أو غير معرف]

⑥ إذا كان ميل المستقيم الذى يمر بالنقطتين (١ ، ٢) ، (س ، ٣) = $\frac{١}{٢}$

فإن س = ... [٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥]



⑦ فى كلاً مما يأتى أثبت أن النقط أ ، ب ، هـ تقع على استقامة واحدة :

① أ (-٢ ، -١) ، ب (١ ، ٢) ، هـ (٣ ، ٤)

② أ (١ ، ١) ، ب (٢ ، ٣) ، هـ (٣ ، ٥)

③ أ (٢ ، -٢) ، ب (٣ ، -١) ، هـ (٤ ، ٠)

---

⑧ إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ١) ، (هـ ، ٦) = ٥ فأوجد قيمة هـ [٣]

---

⑨ أوجد قيمة ك إذا كان :

① ميل المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٣ ، ك) يساوى ٣ [٨]

② ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ك) ، (٢ ، -٢) يساوى ٥ [٣]

③ أ = (-١ ، ٣) ، ب = (ك ، ١) وكان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = -٢ [٠]

④ المستقيم يمر بالنقطتين (-٣ ، ٢) ، (١ ، ك) و يوازى محور السينات [٢]

⑤ المستقيم يمر بالنقطتين (ك ، ٥) ، (٣ ، ١) و يوازى محور الصادات [٣]

---

⑩ أثبت أن ميل المستقيم المار بالنقطتين (١ ، -١) ، (٢ ، ١)

يساوى ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٣) ، (-٢ ، -٧)

مسائل المتفوقين

⑪ أوجد قيمة ك بحيث يكون المستقيم الواصل بين النقطتين (٢ ، ٤) ، (٣ ، ك)

يوازى محور السينات [٤]

---

⑫ أكمل ما يأتى : المستقيم الذى يمر بالنقطتين (٢ ، ٥) ، (أ ، ب)

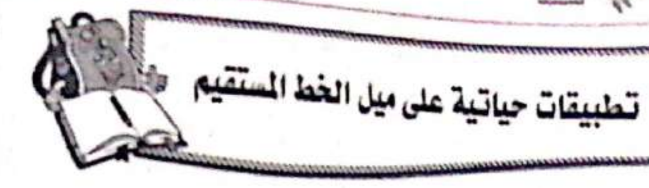
يكون عمودياً على محور السينات عندما أ = ... ، ب = ...

---

⑬ قام عامل دهان بالوقوف على سلم فكان ارتفاع الجزء الرأسى ١,٥ متر و بعد قاعدة السلم عن الحائط ٢ متر انزلق السلم فصار ارتفاع الجزء الرأسى ٠,٧ متر و صار بعد قاعدة السلم عن الحائط ٢,٤ متر

① أوجد ميل السلم فى الحالتين ② أى الوضعين أفضل بالنسبة للعامل ؟



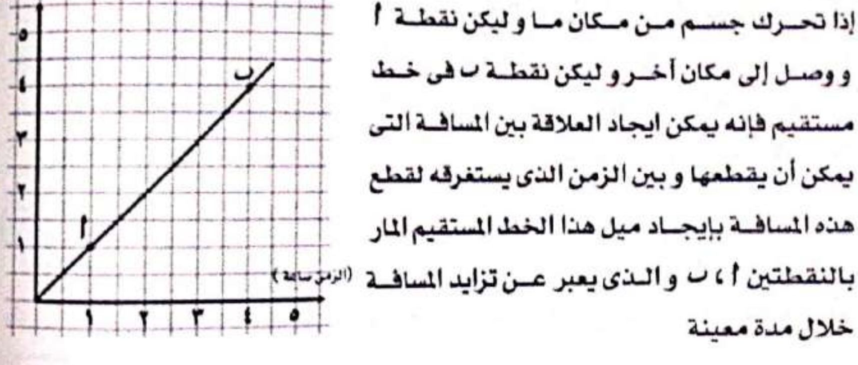


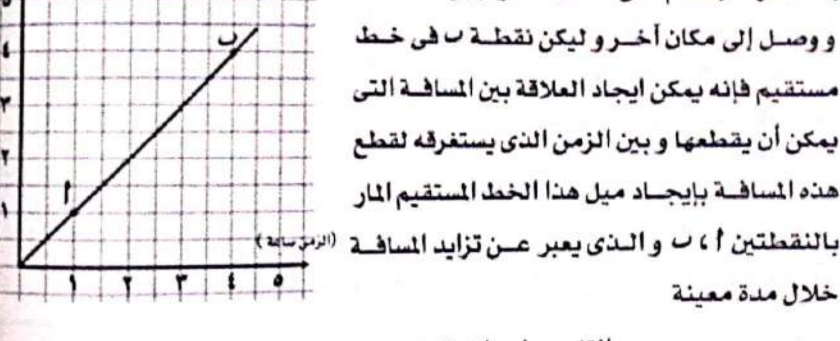
تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم

سوف ندرس بعض التطبيقات الحياتية كتطبيق على العلاقة بين متغيرين مثل العلاقة بين أطوال الأشخاص و أعمارهم ، والعلاقة بين كمية الوقود و المسافة التى تقطعها سيارة أو دراسة حركة سيارة و معرفة العلاقة بين المسافة التى تقطعها والزمن اللازم لذلك و غيره

فمثلاً :

إذا تحرك جسم من مكان ما و ليكن نقطة أ و وصل إلى مكان آخر و ليكن نقطة ب فى خط مستقيم فإنه يمكن ايجاد العلاقة بين المسافة التى يمكن أن يقطعها و بين الزمن الذى يستغرقه لقطع هذه المسافة بإيجاد ميل هذا الخط المستقيم المار بالنقطتين أ ، ب والذى يعبر عن تزايد المسافة خلال مدة معينة





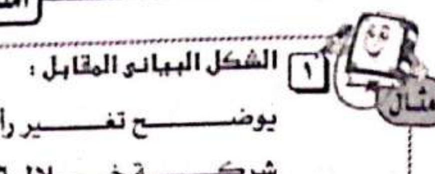
حيث الميل = $\frac{\text{التغير فى المسافة}}{\text{التغير فى الزمن}} = \frac{\text{التغير فى الإحداثى الصادى}}{\text{التغير فى الإحداثى السينى}}$

و إذا كان الجسم يقطع مسافات متساوية فى أزمنة متساوية قيل أن الجسم يتحرك بسرعة منتظمة و الذى يحددها هذا الميل أى أن السرعة المنتظمة " ع " = ميل الخط المستقيم الذى يمثل العلاقة بين المسافة و الزمن بشرط أن تكون العلاقة تمثل جزء من خط مستقيم أما إذا كان عدة قطع مستقيمة و لا تمثل خط مستقيم واحد فإنه يمكن ايجاد السرعة المتوسطة للجسم حيث السرعة المتوسطة = $\frac{\text{المسافات الكلية}}{\text{الزمن الكلى الذى قطعت فيه المسافات}}$

و فيما يلى سوف ندرس أمثلة على هذه التطبيقات :



أمثلة توضيحية



مثال ١ الشكل البيانى المقابل :

يوضح تغير رأس مال شركة خلال ٦ سنوات

① أوجد ميل كل من $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{بجـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـد}}$ و ما دلالة كل منها ؟

② احسب رأس مال الشركة عند بدء عملها

الحل

أ = (٠ ، ٢٠) ، ب = (٢ ، ٤٠) ، جـ = (٤ ، ٤٠) ، د = (٦ ، ٣٠)

① ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}} = \frac{\text{٤٠ − ٢٠}}{\text{٢ − ٠}} = \frac{\text{٢٠}}{\text{٢}} = \text{١٠}$ وهو يعبر عن تزايد رأس مال الشركة خلال السنتين الأولتين بمعدل ١٠ آلاف جنيه (أى ١٠ آلاف جنيه لكل سنة)

ميل $\overleftrightarrow{\text{بجـ}} = \frac{\text{٤٠ − ٤٠}}{\text{٤ − ٢}}$ = صفر وهو يعنى أن رأس مال الشركة كان ثابتاً خلال السنتين الثالثة و الرابعة

ميل $\overleftrightarrow{\text{جـد}} = \frac{\text{٣٠ − ٤٠}}{\text{٦ − ٤}} = \text{−٥}$ وهو يعبر عن تناقص رأس مال الشركة خلال السنتين الأخيرتين بمعدل ٥ آلاف جنيه (أى ٥ آلاف جنيه لكل سنة)

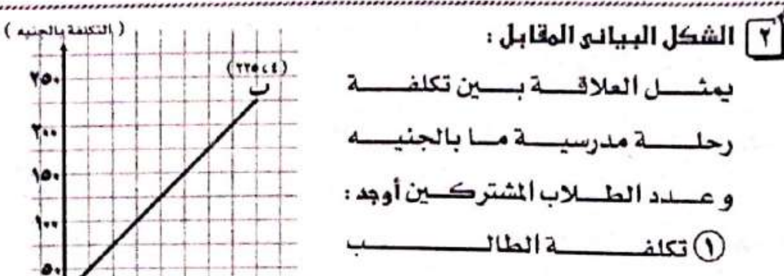
② رأس مال الشركة عند بدء العمل = الإحداثى الصادى عند أ = ٢٠ ألف جنيه

مثال ٢ الشكل البيانى المقابل :

يمثل العلاقة بين تكلفة رحلة مدرسية ما بالجنيه و عدد الطلاب المشتركين أوجد :

① تكلفة الطالب

② المبلغ الثابت الذى تدفعه المدرسة لحجز موعد





الحل

① تكلفة الطالب = ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

= $\frac{٢٢٥ - ٢٥}{٤ - ٠}$ = $\frac{٢٠٠}{٤}$ = ٥٠ جنيه لكل طالب

② المبلغ الثابت الذى تدفعه المدرسة لحجز موعد هو ٢٥ جنيه

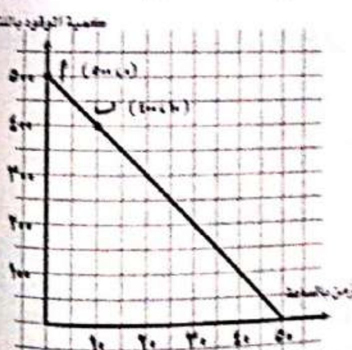
و هو المبلغ الذى يتم دفعه عندما يكون عدد الطلاب = صفر و هو أ

مثال ٣ ملىء خزان الوقود بأحد المخابز و كان سعة الخزان ٥٠٠ لتر و بعد أن عمل المخبز لمدة ١٠ ساعات وجد أن مؤشر الخزان يوضح أن المتبقى $\frac{٤}{٥}$ الخزان

ارسم الشكل البيانى الذى يوضح العلاقة بين كمية الوقود بالخزان و الزمن المستخدم و أوجد الميل و وضح ما يعنيه و احسب الزمن اللازم حتى يفرغ الخزان

الحل

عند بدء العمل يكون الزمن صفر لأنه لم يمر أى وقت و يكون سعة الخزان ٥٠٠ لتر أى أن نقطة البداية هى أ (٠ ، ٥٠٠) و بعد ١٠ ساعات يكون المتبقى $\frac{٤}{٥}$ الخزان أى $\frac{٤}{٥}$ × ٥٠٠ = ٤٠٠



أى أنه بعد ١٠ ساعات تكون نقطة ب = (١٠ ، ٤٠٠)

و نرسم الشكل البيانى حيث يمثل محور الصادات كمية الوقود باللتر و يمثل محور السينات الزمن بالساعات

و تمثل النقطتين أ = (٠ ، ٥٠٠) ، ب = (١٠ ، ٤٠٠)

و نصل بينهما بخط مستقيم يمثل العلاقة

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٤٠٠ - ٥٠٠}{١٠ - ٠}$ = $\frac{-١٠٠}{١٠}$ = -١٠

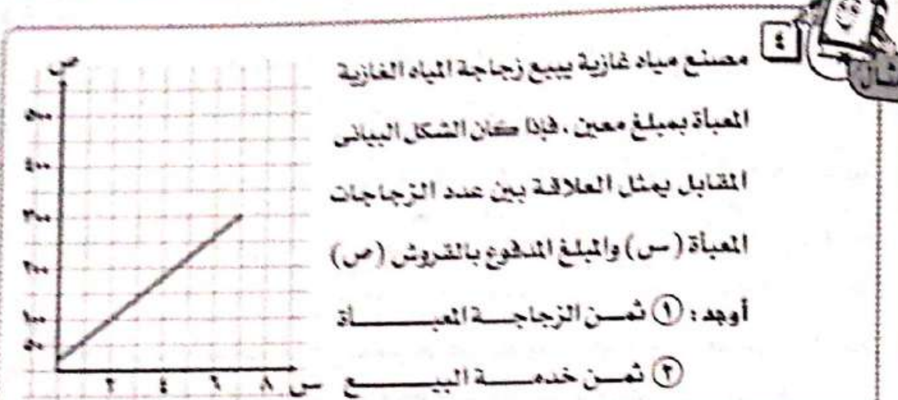
و هذا الميل يعنى أن كمية الوقود بالخزان تقل بمعدل ١٠ لتر كل ساعة

الزمن اللازم حتى يفرغ الخزان (أى عندما ص = ٠)

أى عند نقطة تقاطع الخط المستقيم مع محور السينات و هو ٥٠ ساعة

أو يساوى $\frac{\text{كمية الوقود بالخزان عند البداية}}{\text{معدل النقص فى الوقود}}$ = $\frac{٥٠٠}{١٠}$ = ٥٠ ساعة





مثال ٤ مصنع مياه غازية يبيع زجاجة المياه الغازية المعبأة بمبلغ معين . فإذا كان الشكل البيانى المقابل يمثل العلاقة بين عدد الزجاجات المعبأة (س) والمبلغ المدفوع بالقروش (ص)

أوجد : ① ثمن الزجاجة المعبأة

② ثمن خدمة البيع

الحل

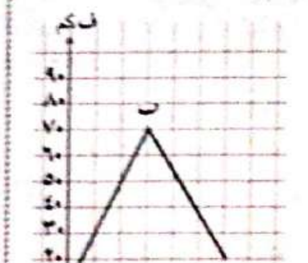
① ثمن الزجاجة المعبأة = ميل المستقيم = $\frac{\text{التغير فى المبلغ المدفوع}}{\text{التغير المناظر فى عدد الزجاجات}}$

= $\frac{٣٠٠ - ١٠٠}{٧ - ٢}$ = $\frac{٢٠٠}{٥}$ = ٤٠ قرشاً

② ثمن خدمة البيع = المبلغ المدفوع (عندما س = صفر)

= طول الجزء المقطوع من محور ص = ٢٠ قرش

مثال ٥ الشكل البيانى المقابل :



يمثل حركة دراجة مقيسة من نقطة ثابتة " أ "

① عين السرعة المنتظمة خلال الساعات الثلاثة الأولى

② عين السرعة المنتظمة خلال الساعات الثلاثة التالية

③ ما بعد السيارة عن نقطة "و" عند بدء قياس الزمن

④ ما بعد السيارة عن نقطة "و" بعد ٦ ساعات من بدء قياس الزمن



الحل

(١) خلال الثلاث ساعات الأولى أ (٠ ، ١٠) ، ب = (٣ ، ٧٠)

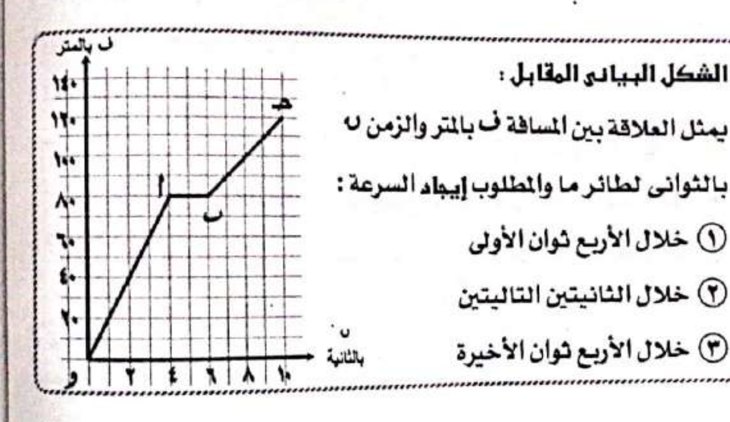
$\therefore$ ع = $\frac{٧٠ - ١٠}{٣ - ٠} = \frac{٦٠}{٣}$ = ٢٠ كم / ساعة

(٢) خلال الثلاث ساعات التالية ع = $\frac{٢٠ - ٧٠}{٦ - ٣} = \frac{-٥٠}{٣}$ كم / ساعة

لاحظ أن السرعة السالبة تعنى أن الدراجة تسير فى الاتجاه المضاد لحركته فى الثلاث ساعات الأولى بسرعة $\frac{٥٠}{٣}$ كم / ساعة

(٣) من الرسم بعد الدراجة عن نقطة "و" عند بدء قياس الزمن = ١٠ كم

(٤) من الرسم بعد الدراجة عن نقطة "و" بعد ٦ ساعات من بدء قياس الزمن = ٢٠ كم



مثال ٦ الشكل البيانى المقابل :

يمثل العلاقة بين المسافة ف بالمتر والزمن ن بالثوانى لطائر ما والمطلوب إيجاد السرعة :

(١) خلال الأربع ثوان الأولى

(٢) خلال الثانيتين التاليتين

(٣) خلال الأربع ثوان الأخيرة

الحل

(١) السرعة خلال الأربع ثوان الأولى أى من نقطة و (٠ ، ٠) إلى أ = (٤ ، ٨٠)

$\therefore$ ع = $\frac{٨٠ - ٠}{٤ - ٠} = \frac{٨٠}{٤}$ = ٢٠ متر / ث

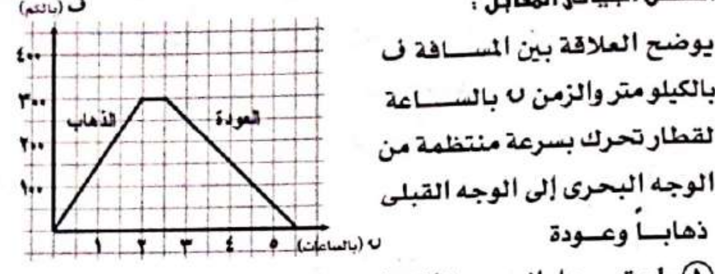
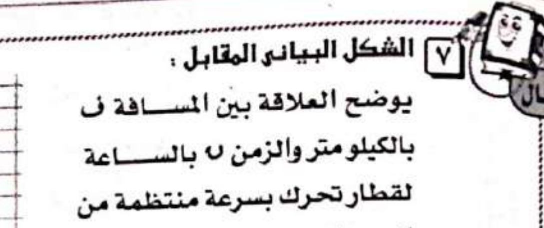
(٢) السرعة خلال الثانيتين التاليتين أى من نقطة أ = (٤ ، ٨٠) إلى نقطة ب (٦ ، ٨٠)

$\therefore$ ع = $\frac{٨٠ - ٨٠}{٦ - ٤} = \frac{\text{صفر}}{٢}$ = صفر أى أن الطائر يظل ساكناً خلال الثانيتين التاليتين

(٣) السرعة خلال الأربع ثوان الأخيرة أى من نقطة ب = (٦ ، ٨٠) إلى حـ = (١٠ ، ١٢٠)

$\therefore$ ع = $\frac{١٢٠ - ٨٠}{١٠ - ٦} = \frac{٤٠}{٤}$ = ١٠ متر / ث

مثال ٧ الشكل البيانى المقابل :

يوضح العلاقة بين المسافة ف بالكيلو متر والزمن ن بالساعة لقطار تحرك بسرعة منتظمة من الوجه البحرى إلى الوجه القبلى ذهاباً وعودة

(١) ما مقدار السرعة المنتظمة فى كل من المرحلتين ؟

(٢) بماذا تفسر القطعة المستقيمة الأفقية فى الشكل ؟

الحل

(١) السرعة خلال الذهاب = $\frac{٣٠٠ - ٠}{٢ - ٠} = \frac{٣٠٠}{٢}$ = ١٥٠ كم / ساعة

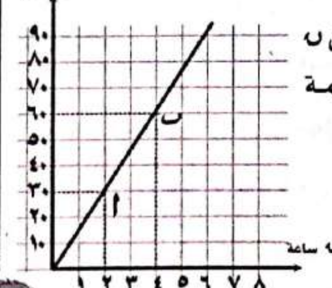
السرعة خلال العودة = $\frac{٠ - ٣٠٠}{٥,٥ - ٢,٥} = \frac{-٣٠٠}{٣}$ = −١٠٠ كم / ساعة

و الإشارة السالبة تعنى أن القطار يتحرك فى الاتجاه المعاكس لحركته الأولى أى أن السرعة = ١٠٠ كم / ساعة فى الاتجاه المعاكس لحركته الأولى

(٢) القطعة المستقيمة الأفقية تبين أن القطار توقف عن الحركة لمدة نصف ساعة وقضى هذا الوقت فى المحطة الأخيرة ثم تحرك عائداً إلى نقطة البداية

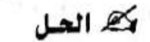
أمثلة للتدريب

تدريب (١)



الشكل البيانى المقابل :

يوضح العلاقة بين المسافة ف بالكم والزمن ن بالساعة لدراجة تتحرك بسرعة منتظمة أوجد سرعة الدراجة



الحل

$\because$ ع = $\frac{ف_٢ - ف_١}{ن_٢ - ن_١}$

$\therefore$ ع = $\frac{.........}{.........}$ = ... كم / ساعة



تدريب (٢)



الشكل البياني المقابل : يوضح حركة دراجة حيث الزمن ن بالثانية ، المسافة ف بالمتر

فأكمل ما يأتي :

① سرعة الدراجة خلال الـ ٢٠ ثانية الأولى

أي من نقطة و = (٠ ، ٠) إلى أ = (٢٠ ، ٩٠)

∴ ع = $\frac{ف_2 - ف_1}{ن_2 - ن_1}$ = $\frac{.........}{.........}$ = ... متر/ثانية

② سرعة الدراجة خلال الـ ٢٠ ثانية التالية أي من أ = (٢٠ ، ٩٠) إلى ب = (.... ، ....)

∴ ع = $\frac{ف_2 - ....}{ن_2 - ....}$ = $\frac{.........}{.........}$ = ... م/ث

وهذا يعني أن ....

③ سرعة الدراجة خلال الـ ٢٠ ثانية الأخيرة أي من ب = (.... ، ....) إلى جـ = (٦٠ ، ٠)

∴ ع = $\frac{ف_2 - ....}{ن_2 - ....}$ = $\frac{.........}{.........}$ = ... = ... م/ث

وهذا يعني أن ....







تمارين (١٢) على تطبيقات حياتية على الخط المستقيم

أسئلة الوزارة

أولاً : راجع معنا واختبر نفسك

١٠ — $\frac{1}{3}$ ساعة امتحان ومراجعة — اختبار تراكمي (١٠)

١ (أ) أكمل ما يأتي :

① [-٢ ، ٥] - {-٢ ، ٥} = ...

② مجموعة حل المتباينة ٢س - ١ ≥ ٥ في ع هي ....

③ $\sqrt{48} - 2(\sqrt{3})^3 + 6\sqrt{\frac{1}{3}}$ في أبسط صورة = ...

④ إذا كان (٢ك ، ك) يحقق العلاقة ص + ٢س = ٥ فإن ك = ...

٤ درجات

(ب) إذا كانت س = $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ ، ص = $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

فأوجد في أبسط صورة قيمة المقدار $\frac{س + ص}{س ص - 1}$

....

....

....

....

٣ درجات ....

(جـ) اسطوانة دائرية قائمة حجمها ٧٢ π سم³ وارتفاعها ٨ سم

أوجد مساحتها الكلية بدلالة π

....

....

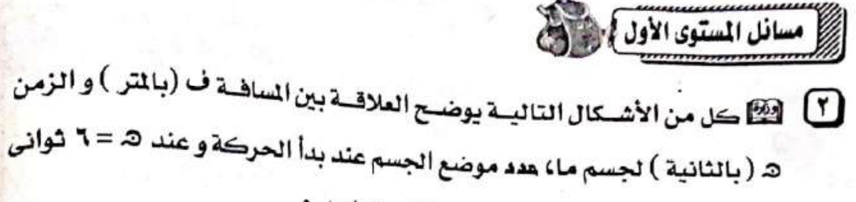
....

....

٣ درجات ....

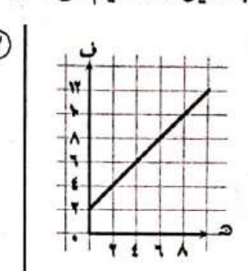


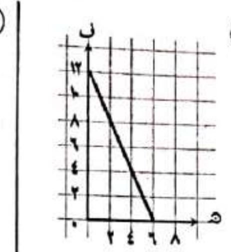
ثانياً : أجب عما يأتى :

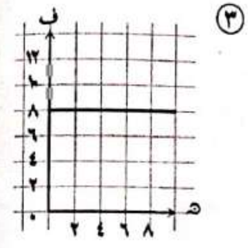


مسائل المستوى الأول

(٢) كل من الأشكال التالية يوضح العلاقة بين المسافة ف (بالمتر) و الزمن ه (بالثانية) لجسم ما، حدد موضع الجسم عند بدأ الحركة و عند ه = ٦ ثوانى و أوجد ميل المستقيم فى كل حالة ماذا يمثل الميل ؟

① 

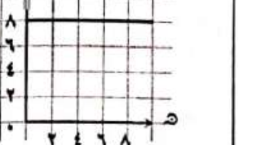
② 

③ 

(٣) **الشكل البيانى المقابل :**

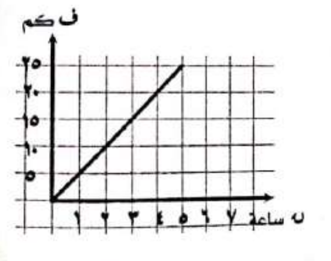
يمثل حركة دراجة تسير بسرعة منتظمة

أوجد سرعة الدراجة



(٤) **الشكل البيانى المقابل :**

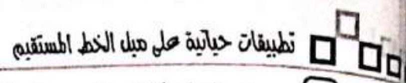
يوضح العلاقة بين عدد القطع المبيعة من سلعة ما وقيمة الرصيد المالى للتاجر

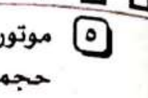


① **أوجد** الرصيد المالى للتاجر قبل البيع ؟

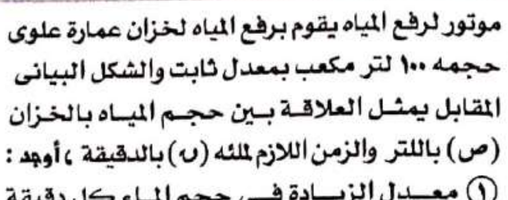
② **ما** رصيد التاجر بعد بيع ٢٠٠ قطعة ؟

③ **ما** عدد القطع المبيعة إذا بلغ رصيد التاجر ٤٠٠٠ جنيه ؟





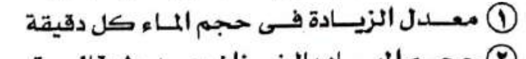
(٥) موتور لرفع المياه يقوم برفع المياه لخزان عمارة علوى حجمه ١٠٠ لتر مكعب بمعدل ثابت والشكل البيانى المقابل يمثل العلاقة بين حجم المياه بالخزان (ص) باللتر والزمن اللازم لملئه (ن) بالدقيقة ، **أوجد :**



① معدل الزيادة فى حجم الماء كل دقيقة

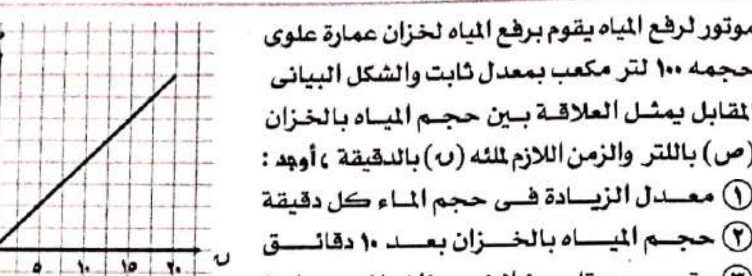
② حجم المياه بالخزان بعد ١٠ دقائق

③ متى يمتلئ الخزان بالماء ؟



(٦) **الشكل البيانى المقابل :**

يمثل العلاقة بين المسافة التى تقطعها طائرة فى أحد رحلاتها (س) بالكيلومتر وحجم الوقود المتبقى فى خزاناتها باللتر (ص) **أوجد :**



① أكبر سعة لخزانات الوقود

② حجم الوقود المتبقى فى نهاية الرحلة

③ متوسط استهلاك الوقود لكل كيلو متر

مسائل المستوى الثانى

(٧) **الشكل البيانى المقابل :**

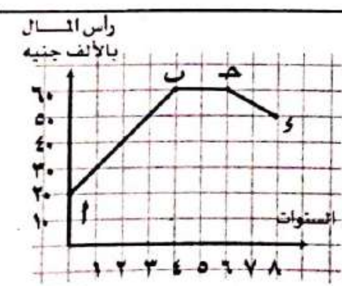
يوضح العلاقة بين طول شخص بالسنتيمترات و عمره بالسنوات

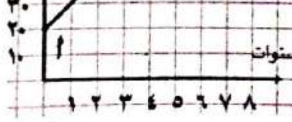
① **أوجد** ميل كل من أ ب ↔ ، ب جـ ↔ ، جـ د ↔ و ما دلالة كل منها ؟

② **احسب** الفرق بين طول هذا الشخص عندما كان عمره ٢٢ سنة و طوله عندما كان عمره ٨ سنوات

(٨) **الشكل البيانى المقابل :**

يوضح تغير رأس مال شركة خلال ٨ سنوات





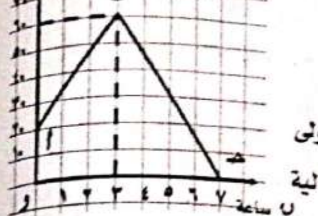
① **أوجد** ميل كل من أ ب ↔ ، ب جـ ↔ ، جـ د ↔ و ما دلالة كل منها ؟

② **احسب** رأس مال الشركة عند بدأ عملها ؟



(٩) **الشكل البيانى المقابل :**

يمثل حركة دراجة مقيسة من نقطة ثابتة ا أوجد :



① السرعة المنتظمة للدراجة خلال الساعات الثلاثة الأولى

② السرعة المنتظمة للدراجة خلال الساعات الأربعة التالية

③ المسافة الكلية التى تحركتها الدراجة

---

(١٠) **الشكل البيانى المقابل :**

يمثل حركة راكب دراجة يحمل بضاعة ليسلمها إلى متجر ما و كان يسير بسرعة منتظمة أوجد :

① سرعته خلال الساعتين الأولتين

② سرعته خلال الساعة الأخيرة

③ بماذا تفسر القطعة المستقيمة الأفقية فى الشكل

---

(١١) **الشكل البيانى المقابل :**

يوضح العلاقة بين المسافة بالكيلو متر والزمن بالساعة لدراجة بخارية تحركت بين مدينتين ا ، ب ذهاباً وعودة

اجب عما يأتى :

① ما مقدار السرعة المنتظمة للدراجة أثناء رحلة الذهاب ؟

② ما مقدار السرعة المتوسطة أثناء العودة ؟

③ ما دلالة القطعة المستقيمة الأفقية فى الشكل ؟

---

(١٢) ملأ حازم خزان سيارته بالوقود و سعة هذا الخزان ٤٠ لتراً و بعد أن تحرك ١٢٠ كم وجد أن المؤشر يوضح أن المتبقى $\frac{3}{4}$ الخزان ، ارسم الشكل البيانى الذى يوضح العلاقة بين كمية الوقود بالخزان و المسافة التى قطعتها السيارة (علماً بأن هذه العلاقة خطية) ، و احسب المسافة التى تقطعها السيارة حتى يفرغ الخزان

[٤٨٠ كم]

(١٣) **الشكل البيانى المقابل :**

يمثل العلاقة بين المسافة بالكيلومترات والزمن بالساعات لحركة سيارتين ا ، ب

① أوجد سرعة كل من السيارتين

② كم تكون المسافة بين السيارتين بعد مرور ٤ ساعات من بدء حركة السيارة ا ؟

---

(١٤) **الشكل البيانى المقابل :**

يوضح العلاقة بين المسافة ف و الزمن ن لحركة قطارين ا ، ب بين محطتين حيث ف (بالكيلومتر) و ن (بالساعة) استخدم الرسم لإيجاد قيمة :

① البعد بين المحطتين

② الزمن الذى استغرقه كل من القطارين

③ السرعة المتوسطة لكل منهما

④ ما دلالة القطعة المستقيمة فى حركة القطار ا

مسائل المتفوقين

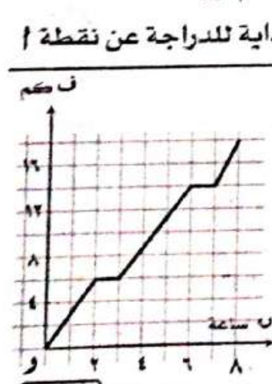
(١٥) تحركت دراجة بخارية فوجد أنها بعد دقيقة واحدة أصبحت على بعد ٢ كم من نقطة معينة ا و بعد ٣ دقائق أصبحت على بعد ٥ كم من نفس النقطة ارسم شكلاً بيانياً يمثل هذه الحركة و من الرسم أوجد :

① سرعة الدراجة ② بعد نقطة البداية للدراجة عن نقطة ا

---

(١٦) **الشكل البيانى المقابل :**

يوضح خط سير شخص ما خلال رحلة



① ما الفترة التى تحرك فيها الشخص بأقصى سرعة ؟

② ما السرعة المتوسطة لحركة الشخص خلال الرحلة ؟

③ ما متوسط السرعات خلال الرحلة ؟

الوحدة الثالثة جمع البيانات و تنظيمها

- لدراســـة ظاهــرة أو مشكلــة مــا كــى نصل لطــرق علاجــها يلـــزم تجميــع بيانـــات حـــول هــذه الظاهــرة أو المشكلـــة محـل الدراســة
- و نلاحــظ عنــد جمــع البيانــات أنــها تنقســم إلــى قسمــين :

(١) بيانات كميــة : و هـــى التـــى تكـــون فـــى صـــورة أعـــداد
مثل : عـدد التلاميـذ – عـدد الكتب – عـدد المدارس – السن – الـوزن – الأجور

(٢) بيانات وصفية : و هـــى التـــى تكـــون فـــى صـــورة صفـــات
مثل : الحالة الاجتماعية (أعزب – متزوج – أرمل – ....) ، الجنس (ذكر – أنثى) ،
تقديــرات (ممتـــاز – جيـــد – جيـد جـداً – مقبـــول – ....) ،
وسائـــل المواصــــلات (مـــترو – سيــــارة – دراجــــة – ....)

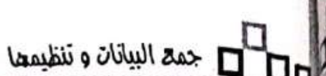
- و لجمــع البيانــات فإنــه يمكــن جمعــها فــى صــورة :

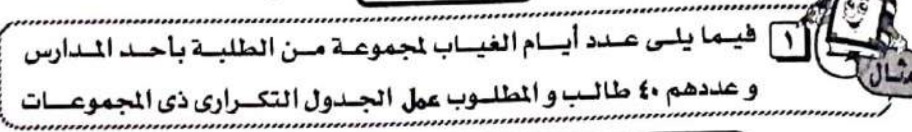
بيانات ابتدائيـــة : عن طريق استبيـــان أو كشـــوف الملاحظـــة
بيانات ثانويـــة : عن طريق مصادر مثل الإنترنت ، الكتب ، الوثائق ، النشرات الإحصائية
بيانات تجريبيـة : عن طريق التجـارب لاختبــار صحــة نظريــة مــا

- و لعرض البيانات التى نصل اليـها يلزم تنظيمها و عرضها بطريقــة تساعــد على الاستفادة منــها و يتم تنظيم و ترتيب البيانات فى جداول تسهـل استنتاج المعلومات و من هــذه الجــداول " الجداول التكراريــة "
- و قــد درسنــا الجــداول التكراريــة البسيطــة العــام السابــق و التى تستخدم لعرض الأعداد الصغيرة و البسيطــة ، و لكن فى أحيــان كثيرة تكــون البيانات الإحصائيــة أعــداد كبيرة مثل أجور الموظفين ، و درجات الطلاب فى الثانوية العامة و تنظيم هــذه البيانات فى جداول تكرارية بسيطـة يجعلها كبيرة جداً لذلك نلجأ إلى الجداول التكرارية ذى المجموعات

و فيمــا يلى ســوف نوضح من خــلال المثــال كيفيــة تنظيــم البيانـــات و عرضـــها فـــى جـــدول تكـــرارى ذى مجموعـــات :







مثال ١ فيمــا يلــى عــدد أيــام الغيــاب لمجموعــة مــن الطلبــة بأحــد المــدارس و عددهم ٤٠ طالــب و المطلــوب **عمل** الجــدول التكــرارى ذى المجموعـــات

١٠	٢١	٦	٣٠	١٧	٢٦	٢١	١٨	٢٣	١٤
٣٢	٢٠	١١	١٥	٢٨	٥	٢٢	١٣	٢٧	١٧
١٥	٢٥	١٦	٢١	١٢	٢٠	١٦	٢٢	٧	٢٤
٢٤	٢٩	٢٢	١٨	٢٣	٢٥	١١	٢٦	٢٥	١٩

الحل

لتكـــوين الجـــدول التكـــرارى ذى المجموعــات نتبـــع الخطـــوات التاليـــة :

① نوجد أصغر قيمة و أكبر قيمة لهذه البيانات فنجد أن أصغر عـدد لأيام الغياب هو ٥ و أكبر عدد هو ٣٢
أى أن قيم الجدول تبدأ من ٥ و تنتهى عند ٣٢ و الفرق بين أكبر قيمة و أصغر قيمة يسمى المدى
أى أن **المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة**
∴ المدى = ٣٢ – ٥ = ٢٧

الغياب	العلامات	التكرار
٥ –	///	٣
١٠ –	/ ~~////~~	٦
١٥ –	//// ~~////~~	٩
٢٠ –	// ~~////~~ ~~////~~	١٢
٢٥ –	/// ~~////~~	٨
٣٠ –	//	٢
المجموع		٤٠

② نجــزىء المدى إلى عــدد مناسب من المجموعات و ليكن ٦ مجموعات منفصلة و متساوية الطول

∴ مدى (طول) المجموعة = $\frac{٢٧}{٦}$ = ٤,٥ ≃ ٥

أى أن كل مجموعة تحتوى على ٥ أعــداد فالمجموعة الأولى مثلاً تحتوى الأعداد ٥ (أصغر قيمــة) ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ و نكتب " ٥ – " و تعنى مجموعة البيانــات الأكبــر مــن أو تســاوى ٥ و الأقــل مــن ١٠ ، و المجموعــة الثانيــة تحتــوى العناصـــر ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ و تكتــب " ١٠ – " و هكـــذا



ثانياً : أجب عما يأتى :

مسائل المستوى الأول

(٢) فيما يلى بيان بالدرجات التى حصل عليها ٣٠ طالباً فى أحد الاختبارات

٧	١٠	٧	٤	٥	٨	٦	٧	١٣	١٢
٢	٩	١١	١٢	١١	٩	١٥	١٢	١٣	٩
٥	١٤	١٩	٣	٩	١٤	٣	١٣	٨	١٧

مطلوب تكوين الجدول التكرارى ذى المجموعات لهذه البيانات

(٣) فيما يلى عدد الطلاب الذين يترددون على مكتبة المدرسة خلال ٣٠ يوم

٣٣	٣٨	٣٠	٣٦	٤٦	٣٥	٢٧	٢٧	٤٨	٣٤
٢٨	٣٨	٤٤	٤٢	٢٤	٤٢	٤٧	٣٨	٣٢	٤٠
٣٤	٤٣	٥٠	٣٥	٢٠	٢٤	٤٠	٥٠	٢٢	٣٩

و المطلوب تكوين الجدول التكرارى ذى المجموعات لهذه البيانات

(٤) فيما يلى بيان بالدرجات التى حصل عليها ٣٠ طالباً فى أحد الاختبارات بمدرسة ما

٧	٨	٦	٧	١٣	٩	٨	٢	٧	٦
١٠	٥	٦	١٢	٠	٢	٧	٥	٣	٨
٧	٤	١٣	٤	١٢	٧	١١	١١	١٢	٩

والمطلوب تكوين جدول توزيع تكرارى متخذاً المجموعات ٠- ، ٣- ، ٦- ، ...

مسائل المستوى الثانى

(٥) فيما يلى بيانات الأجر الأسبوعى لعدد ٤٠ عاملاً فى أحد المصانع

١٥	١٠	٢٤	٢٥	٢٢	١٦	٢١	٢٥	٢٣	١٧
٢٢	٣٧	١٦	٣٦	١١	٢٤	١٧	٢٢	١٨	٢١
١٩	٣٢	٢٦	٢١	١٥	٢٧	٣٣	١٢	٢٧	٢٥
٢٣	٢٦	١٨	٢٨	٢٣	١٦	٢٤	٢٠	١٩	١٧

والمطلوب تكوين جدول توزيع تكرارى ذى المجموعات لهذه البيانات



(٦) فيما يلى بيان لدرجات الحرارة المئوية فى ٤٠ مدينة فى أحد أيام السنة

١٢	٢٨	١٦	٢٦	٣٠	٢٠	١٤	٢١	١٥	٢٧
٢٥	١٥	٣٠	٢٢	١٤	٢٧	١٥	٢٤	٢٢	٣٠
١٥	٣٠	٢٢	٣٣	٢٧	٢٨	٢٦	١٦	١٣	٢٦
١١	٢١	١٦	٢٨	٢١	٣٠	٢١	٢١	٢٥	٢٣

والمطلوب تكوين جدول توزيع تكرارى ذى المجموعات لهذه البيانات

(٧) فيما يلى الأجر الأسبوعى بالجنيهات لأربعين عاملاً فى أحد المصانع

٤٧	٧١	٣٦	٩٤	٥٤	٦٤	٨٧	٨٩	٦٢	٥٧
٥١	٦١	٤٤	٥٢	٧٠	٦٦	٥٦	٣٢	٦٩	٣٦
٧٩	٤٨	٧٧	٩٠	٦٥	٩٩	٩٦	٦٧	٦٠	٥٥
٩٥	٧٥	٨١	٨٤	٧٨	٣٨	٤٩	٩٤	٤٨	٥٩

و المطلوب عمل جدول تكرارى ذى مجموعات

(خذ المجموعات الجزئية ٣٠ - ، ٤٠ - ، ٥٠ - ، ..... ، ٩٠ -)

و ما المجموعة التى بها أكبر تكرار ؟ و ما المجموعة التى بها أقل تكرار ؟

مسائل المتفوقين

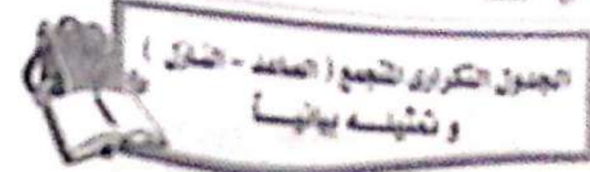
(٨) فيما يلى أرباح السنة الأولى لعدد ٦٠ طالب ممن لديهم دفاتر توفير بالبريد

٥٠	٤٣	٥٥	٣١	٣٢	٤٨	٤١	٤٥	٥٦	٤٠
٦١	٤٣	٥١	٣٦	٤٠	٤٢	٣٠	٤٧	٤٥	٦٣
٢٢	٣٣	٥٣	٣٥	٣٧	٢١	٤٩	٥٩	٤٢	٥٦
٤٣	٥٣	٤٤	٥٣	٤٦	٣٣	٥٧	٣٥	٥٢	٤٥
٢٠	٤٧	٥٤	٦٥	٤٩	٣٧	٤٠	٤٢	٤٦	٤٤
٤٩	٣٢	٥٥	٤٦	٤٩	٥٨	٦٧	٣٤	٥٤	٣٩

والمطلوب تكوين جدول توزيع تكرارى ذى المجموعات لهذه البيانات







الجدول التكراري المتجمع (الصاعد - النازل) و تمثيله بيانياً

درسنا في الدرس السابق كيفية تنظيم البيانات في الجدول التكراري ذي المجموعات فإذا كان لدينا البيانات الخاصة بدرجات مادة الرياضيات لفصل ما و تم تنظيمها في الجدول التالي :

المجموعات	١٠ -	٢٠ -	٣٠ -	٤٠ -	٥٠ -
عدد الطلاب	٧	١١	١٣	١٩	١٠

و إذا أردنا معرفة بعض المعلومات مثل عدد الطلاب الذين حصلوا على ٣٠ درجة فأكثر فإننا يمكن أن نجمع عدد الطلاب الذين حصلو على ٣٠ درجة و الذين حصلو على أكثر من ٣٠ درجة لنعرف الإجابة

و إذا أردنا معرفة الذين حصلوا على أقل من ٣٠ درجة فإننا أيضاً نجمع الخانات التي نصل بها إلى المعلومات المطلوبة و لكن إذا أردنا معرفة بعض المعلومات عن عدد الطلاب الذين حصلو على درجات ٧٠ ٪ فأكثر في الثانوية العامة فهل نجمع كل هؤلاء الطلاب و الذي يصل عددهم إلى ٢٠٠٠٠٠ أحياناً ؛ لهذا نتعرف على نوع آخر من الجداول و التي تتيح لنا معرفة هذه الأسئلة بكل سهولة و هي الجداول التكرارية المتجمعة و التي سنتعرف على كيفية تكوينها و تمثيلها بيانياً من خلال المثال التالي :

أمثلة توضيحية

١ الجدول التالي يبين التوزيع التكراري لأعمار ٦٠ عامل بأحد المصانع :

مجموعات العمر	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	المجموع
عدد العمال	٣	١٠	١٩	٢٣	٥	٦٠

كون الجدولين التكراريين المتجمعين الصاعد و النازل ثم ارسم المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل ومن الرسم أوجد :

① عدد العمال الذين تقل أعمارهم عن ٤١ سنة

② عدد العمال الذين عمر كل منهم ٣٦ سنة فأكثر

الحل

لتكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد و تمثيله بيانياً نتبع الخطوات التالية :

① نكون الجدول من خانتين نكتب في الأولى الحدود العليا للمجموعات و نكتب فيها المجموعات من أول مجموعة ٢٥ إلى آخر مجموعة و نهاية آخر مجموعة " ٤٥ - ٥٠ " و نكتب قبل كل مجموعة " أقل من " و الخانة الثانية نكتب التكرار المتجمع الصاعد و نبدأ بـ " صفر " و ننتهي بمجموع التكرارات

الجدول التكراري المتجمع الصاعد

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد	
أقل من ٢٥	صفر	٣ +
أقل من ٣٠	٣	١٠ +
أقل من ٣٥	١٣	١٩ +
أقل من ٤٠	٣٢	٢٣ +
أقل من ٤٥	٥٥	٥ +
أقل من ٥٠	٦٠	

و نجمع صفر مع تكرار أول خانة ثم نضيف للمجموع تكرار ثاني خانة و هكذا (نكتب عدد التكرارات على يسار الجدول لتساعدنا في الجمع)

② نمثل الجدول بيانياً بأن نخصص المحور الأفقي للمجموعات و المحور الرأسي للتكرار المتجمع الصاعد

- نختار مقياساً للرسم على المحورين بحيث يتسع كل منهما للبيانات التي ستكتب عليه
- نمثل التكرار المتجمع الصاعد لكل مجموعة و نصل بينهم بخط منحنى

المنحنى التكراري المتجمع الصاعد — التكرار: ١٠، ٢٠، ٣٠، ٤٠، ٥٠، ٦٠ — المجموعات: ٢٥، ٣٠، ٣٥، ٤٠، ٤٥، ٥٠

ومن على المحور الأفقي عند العدد ٤١ نرسم عموداً يقطع المنحنى في نقطة و من هذه النقطة نرسم خطاً يوازي محور المجموعات بحيث يقطع محور التكرارات في نقطة فيكون هو عدد العمال المطلوب و من الرسم نجد أن عدد العمال الذين يقل أعمارهم عن ٤١ سنة = ٣٩ عاملاً

و لتكوين الجدول التكرارى المتجمع النازل فإننا نتبع نفس الخطوات ولكن نكتب فى الخانة الأولى للجدول الحدود السفلى للمجموعات و نكتب فيها المجموعات و بعدها " فأكثر " و الخانة الثانية نكتب التكرار المتجمع النازل و من الرسم نجد أن عدد العمال الذين عمر كل منهم ٣٦ سنة فأكثر = ٤٤ عاملاً و لاحظ أن التكرار المتجمع النازل يبدأ بمجموع التكرارت و ينتهى بالصفر كما يلى :

الجدول التكرارى المتجمع النازل

الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل	
٢٥ فأكثر	٦٠	−٣
٣٠ فأكثر	٥٧	−١٠
٣٥ فأكثر	٤٧	−١٩
٤٠ فأكثر	٢٨	−٢٣
٤٥ فأكثر	٥	−٥
٥٠ فأكثر	صفر	

المنحنى التكرارى المتجمع النازل

التكرار
٦٠
٥٠
٤٠
٣٠
٢٠
١٠
المجموعات
٢٥ ٣٠ ٣٥ ٤٠ ٤٥ ٥٠



تدريب (١)

كون الجدولين التكراريين المتجمعين الصاعد و النازل للتوزيع التكرارى الآتى ثم ارسم المنحنى التكرارى لكل منهما

المجموعات	−١٠	−٢٠	−٣٠	−٤٠	−٥٠	المجموع
التكرار	٧	٩	١٢	٧	٥	٤٠

الحل

الجدول التكرارى المتجمع الصاعد

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد	
أقل من ١٠	صفر	٧+
أقل من ٢٠	....	٩+
أقل من ٣٠	....	.... +
أقل من ٤٠	....	٧+
أقل من ٥٠	....	.... +
أقل من ٦٠	٤٠	

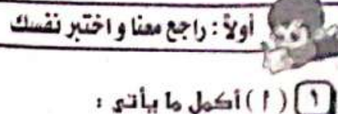
الجدول التكرارى المتجمع النازل

الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل	
١٠ فأكثر	٤٠	−٧
٢٠ فأكثر	....	− ....
٣٠ فأكثر	....	− ....
٤٠ فأكثر	....	− ....
٥٠ فأكثر	....	−٥
٦٠ فأكثر	....	

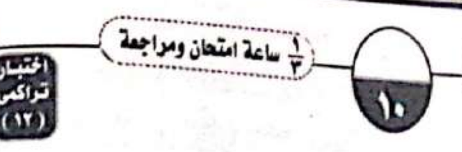


تمارين (١٤) على الجدول التكرارى المتجمع و تمثيله بيانياً

أسئلة الوزارة



أولاً : راجع معنا و اختبر نفسك



اختبار تراكمى (١٢)

[١] (أ) أكمل ما يأتى :

① [-٣ ، ٠] ∩]٠ ، ١] = ...

② مجموعة حل المتباينة س - ٣ ≥ ٣ س - ٥ ≥ س + ٧ فى ح هو ....

③ إذا كانت س = $٢\sqrt{٣} + ٢$ ، ص = $\sqrt{١٢} - ٢$ فإن قيمة $\frac{س - ص}{س ص - ٤}$ = ...

④ إذا كان حجم كرة ٤ π سم³ فإن طول نصف قطرها = ... سم

٤ درجات

(ب) أوجد مجموعة حل المعادلة $\sqrt{٢}$ س + $\sqrt{١٠}$ = ٢ $\sqrt{١٠}$

....

....

....

....

٣ درجات

(جـ) الشكل المقابل يوضح العلاقة بين المسافة (ف) التى يقطعها جسم بالمتر خلال زمن (ن) بالثانية

① حدد موضع الجسم

ⓐ عند بدأ الحركة ⓑ بعد ٦ ثوانى

② أوجد ميل المستقيم المحدد لمسار الجسم

....

....

....

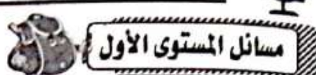
....

....

٣ درجات



ثانياً : أجب عما يأتى :



مسائل المستوى الأول

[٢] كون الجدولين التكراريين المتجمعين الصاعد والنازل للتوزيعات التكرارية الآتية ثم ارسم المنحنى التكرارى لكل منهما

①

المجموعات	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	المجموع
التكرار	٧	٩	١٥	١١	٨	٥٠

②

المجموعات	٢-	٤-	٦-	٨-	١٠-	١٢-	المجموع
التكرار	٢٥	١٠	٥	٢٠	١٥	٢٥	١٠٠

③ وزارة

المجموعات	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	٥٥-	المجموع
التكرار	٦	٨	١٠	٢٠	٢٥	١٥	١٠	٦	١٠٠

مسائل المستوى الثانى

[٣] الجدول الآتى يبين أوزان ٥٠ طفلاً بالكيلوجرامات

مجموعات الأوزان	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	٥٥-	٦٥-	المجموع
عدد الأطفال	٣	٧	١٠	١٥	١٠	٥	٥٠

① كون الجدولين التكراريين المتجمعين الصاعد و الهابط

② أوجد عدد الأطفال الذين يكون وزن كل منهم أقل من ١٥ كيلوجرام [صفر]

③ أوجد عدد الأطفال الذين يكون وزن كل منهم ١٥ كيلوجرام فأكثر [٥٠]

④ أوجد عدد الأطفال الذين لا تقل أوزانهم عن ٣٥ كجم [٤٠]



٤ فيما يلي التوزيع التكراري لدرجات ١٠٠ طالب في أحد الاختبارات

مجموع الدرجات	٠-	٤-	٨-	١٢-	١٦-	المجموع
التكرار	٥	١٥	٣٠	٤٠	١٠	١٠٠

ارسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد لهذا التوزيع ومن الرسم أوجد عدد الطلاب الذين تقل درجاتهم عن ١٠ درجات والذين تقل درجاتهم عن ١٤ درجة [٣٥، ٧٥]

---

٥ البيانات التالية لدرجات ١٠٠ طالب في أمتحان تجريبي لمادة الرياضيات

المجموعات	٠-	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
التكرار	٨	١٤	١٥	٢٨	٢٣	١٢	١٠٠

والمطلوب :

① تكوين كل من الجدول التكراري المتجمع الصاعد والنازل

② رسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد والنازل على نفس ورقة الرسم البياني

③ من الرسم أوجد عدد الطلاب الحاصلين على أقل من ٤٠ درجة والحاصلين على ٤٠ درجة فأكثر

④ ما النسبة المئوية لنجاح الطلاب علماً بأن النهاية الصغرى للنجاح ٢٠ درجة ؟

⑤ ما النسبة المئوية للطلاب الحاصلين على أكثر من ٤٥ درجة ؟

---

٦ الجدول الآتي يمثل التوزيع التكراري لأعمار ٥٠ عامل بأحد المصانع

المجموعات	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	المجموع
التكرار	٥	٨	٩	١٣	....	٥	٣	٥٠

والمطلوب :

① أكمال الجدول

② رسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد والمنحنى التكراري المتجمع النازل لهذا التوزيع

③ من الرسم أوجد : (أ) عدد العمال الذين أعمارهم أكبر من ٣٢ سنة

(ب) عدد العمال الذين أعمارهم أصغر من ٤٣ سنة



مسائل المتفوقين

٧ الجدول التالي يمثل التوزيع التكراري لأجور ١٠٠ عامل بالجنيه في اليوم في أحد المصانع

مجموعات الأجر	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	المجموع
عدد العمال	٣	٨	١٢	١٨	٢٦	٢٣	١٠	١٠٠

ارسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد والهابط واستخدم الرسم في إيجاد ما يلي :

① كم عامل حصل على أقل من ١٢ جنيه [٦]

② كم عامل حصل على ٨ جنيهات فأكثر [٩٩]

③ كم عامل حصل على أقل من ٢٠ جنيه [٢٣]

④ كم عامل حصل على ١٢ جنيه فأكثر [٩٤]

⑤ كم عامل حصل على أقل من ٢٤ جنيه [٣٨]

⑥ كم عامل حصل على ١٦ جنيه فأكثر [٨٦]

⑦ كم عامل حصل على أقل من ٢٦ جنيه [٤٥]

⑧ كم عامل حصل على ٢٤ جنيه فأكثر [٦١]





مقاييس النزعة المركزية
الوسط الحسابى

بملاحظة الجداول التكرارية نجد أن التكرارات تبدأ صغيرة ثم تتزايد حتى تصل إلى نهاية عظمى (أعلى الدرجات) ثم تتناقص و هذا يعنى أن عدداً كبيراً من التكرارات يتراكم عند قيمة متوسطة و هذا السلوك يسمى بالنزعة المركزية

فمثلاً : درجات الطلاب فى الثانوية العامة نجدها تتراكم معظمها ما بين ٧٠ ٪ ، ٩٠ ٪
و تتراكم أكثر عند قيمة معينة و التى تمثل مركز جذب لأغلب التكرارات
و غير هذا تكون أعداد الطلاب فيها قليل بالمقارنة بمركز الجذب هذا
و أى دراسة إحصائية لتوزيع تكرارى يعتمد أساساً على دراسة هذا السلوك و قياسه
و من مقاييس النزعة المركزية الوسط الحسابى و الوسيط و المنوال

الوسط الحسابى (المتوسط أو التوقع) :

هو أبسط المتوسطات جميعاً و أكثرها تداولاً
و هو القيمة التى لو أعطيت لكل مفردة من مفردات المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة هو نفس مجموع القيم الأصلية
و يمكن حسابه بجمع قيم المفردات كلها ثم تقسم على عدد المفردات

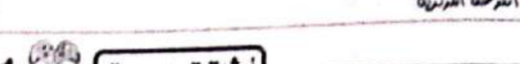
أى أن الوسط الحسابى لمجموعة من القيم = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$

لحساب الوسط الحسابى لتوزيع تكرارى ذى مجموعات نتبع الآتى :

(١) نكون جدول مكون من ٤ أعمدة ، العمود الأول نكتب به المجموعات
(٢) العمود الثانى و نكتب به التكرار
(٣) العمود الثالث و نكتب به مراكز المجموعات

حيث مركز المجموعة = $\frac{\text{بداية المجموعة + نهاية المجموعة}}{٢}$

(٤) العمود الرابع نكتب به حاصل ضرب تكرار كل مجموعة × مركز المجموعة
(٥) نحسب الوسط الحسابى حيث يساوى مجموع حواصل الضرب ÷ مجموع التكرارات



أمثلة توضيحية

مثال (١) إذا كانت درجات ٥ طلاب فى امتحان شهر يناير لمادة الرياضيات هى ٧ ، ١٠ ، ٣ ، ٦ ، ٩ فأوجد الوسط الحسابى لهذه الدرجات

الحل

∵ الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$

∴ الوسط الحسابى = $\frac{٧ + ١٠ + ٣ + ٦ + ٩}{٥} = \frac{٣٥}{٥} = ٧$ درجات

مثال (٢) من الجدول التالى أحسب الوسط الحسابى

المجموعات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
التكرار	١٠	٢٠	٣٠	٢٥	١٥	١٠٠

الحل

نحدد مراكز المجموعات

مركز المجموعة الأولى = $\frac{١٠ + ٢٠}{٢} = ١٥$ ، مركز المجموعة الثانية = $\frac{٢٠ + ٣٠}{٢} = ٢٥$ وهكذا

و نعتبر نهاية المجموعة الأخيرة = ٦٠ فيكون مركزها = $\frac{٥٠ + ٦٠}{٢} = ٥٥$

ثم نكون الجدول الآتى و نحسب فى الخانة الأخيرة مركز المجموعة × التكرار

المجموعات	التكرار "ك"	مراكز المجموعات "م"	ك × م
١٠-	١٠	١٥	١٠ × ١٥ = ١٥٠
٢٠-	٢٠	٢٥	٢٠ × ٢٥ = ٥٠٠
٣٠-	٣٠	٣٥	٣٠ × ٣٥ = ١٠٥٠
٤٠-	٢٥	٤٥	٢٥ × ٤٥ = ١١٢٥
٥٠-	١٥	٥٥	١٥ × ٥٥ = ٨٢٥
	١٠٠		٣٦٥٠

الوسط الحسابى = $\frac{٣٦٥٠}{١٠٠} = ٣٦,٥$



تدريب (١)

الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى للأجر الأسبوعى لمائة عامل بالجنيه

المجموعات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
التكرار	١٠	٢٠	٣٥	٣٠	٥	١٠٠

أوجد الوسط الحسابى للأجر الأسبوعى

الحل

المجموعات	التكرار "ك"	مراكز المجموعات "م"	ك × م
١٠-	١٠	١٥	....
٢٠-	....	....	....
٣٠-	٣٥	....	....
٤٠-	....	....	....
٥٠-	....	....	....
	١٠٠		....

الوسط الحسابى = $\frac{........}{........}$ = ...





تمارين (١٥) على الوسط الحسابى

أولاً : راجع معنا و اختبر نفسك

ساعة امتحان ومراجعة ١٠

(١) (أ) أكمل ما يأتى :

① [٣ ، ٧] − [٤ ، ٧] = ...

② مجموعة حل المتباينة ١ − س ≤ ١ − ٢س < ٣ − س فى ح هى ....

③ العلاقــة س − ٥ = ٠ يمثلـها مستقيــم ميلـــه ....

④ إذا كانت س = $\sqrt{٥} - \sqrt{٢}$ ، ص = $\frac{٣}{\sqrt{٥} - \sqrt{٢}}$ فإن $س^٢ - ٢ س ص + ص^٢$ = ...

(٤ درجات)

(ب) اسطوانة دائرية قائمة حجمها ١٥٤٠ سم³ وارتفاعها ١٠ سم أوجد مساحتها الكلية

....

(٣ درجات)

(جـ) الجدول التالى يوضح التوزيع التكرارى لأجور ١٠٠ عامل بأحد المصانع اسبوعياً

المجموعات	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-	المجموع
التكرار	٥	٢٠	٢٥	٤٠	١٠	١٠٠

① أوجد عدد العمال الذين تقل أجورهم عن ٨٠ جنيه اسبوعياً (٣ درجات)

② ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد

....





ثانياً : أجب عما يأتى :

مسائل المستوى الأول

[٢] أكمل ما يأتى :

① الوسط الحسابى لمجموعة من القيم = ...

② الوسط الحسابى للقيم ٣ ، ٢ ، ٤ هو ....

③ الوسط الحسابى للقيم ٢ ، ٦ ، ٤ ، ٥ ، ٨ هو ....

④ الوسط الحسابى للقيم ٩ ، ١٤ ، ١١ ، ١٣ ، ١٨ هو ....

⑤ الوسط الحسابى للقيم ١٢ ، ١٥ ، ١٤ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ هو ....

[٣] اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

① الوسط الحسابى للقيم ٨ ، ٧ ، ٤ ، ٥ هو ....
[٥ أ، ٦ أ، ٤ أ، ٩]

② الوسط الحسابى للقيم ٧ ، ٣ ، ٢ ، ٥ ، ٨ هو ....
[٤ أ، ٥ أ، ٨ أ، ٢]

③ الوسط الحسابى للقيم ٢ ، ١٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ هو ....
[٦ أ، ٤ أ، ٨ أ، ١٠]

④ الوسط الحسابى للقيم س ، س - ص ، ص - س هو ....
[س ص أ، س أ، $\frac{١}{٣}$ س أ، $\frac{ص}{٢}$]

⑤ إذا كان الوسط الحسابى لمجموعة القيم ١٧ ، ١٥ ، ص هو ١٥ فإن ص = ...
[١٤ أ، ١٨ أ، ١٦ أ، ١٣]

مسائل المستوى الثانى

[٤] الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ١٠٠ تلميذ فى مادة الرياضيات

الدرجات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
التكرار	٥	١٥	٣٠	٤٠	١٠	١٠٠

أوجد الوسط الحسابى لدرجات التلاميذ [٣٨,٥]



[٥] احسب الوسط الحسابى للتوزيعات التكرارية الآتية :

①

المجموعات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
التكرار	٢	٨	١٠	١٨	١٢	٥٠

[٤١]

②

المجموعات	١٢-	١٦-	٢٠-	٢٤-	٢٨-	٣٢-	المجموع
التكرار	٣	٧	١٠	١٥	١٠	٥	٥٠

[٢٤,٩٦]

③

المجموعات	٠-	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
التكرار	٥	٣	٦	٤	٢	٥	٢٥

[٢٩]

④

المجموعات	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-	المجموع
التكرار	١٠	١٢	١٨	٥	٣	٢	٥٠

[٦٢]

⑤

المجموعات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
التكرار	١٠	٢٥	٣٥	٢٠	١٠	١٠٠

[٣٤,٥]

⑥

المجموعات	٠-	٣-	٦-	٩-	١٢-	١٥-	١٨-	المجموع
التكرار	٣	٦	٨	١٠	١٢	٦	٥	٥٠

[١١,١]

⑦

المجموعات	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	٥٥-	المجموع
التكرار	٤	١٦	١٨	٢٥	١٨	١٩	١٠٠

[٣٩,٤]

[٦] فيما يلى التوزيع التكرارى لدرجات حرارة ١٠٠ منطقة فى دول العالم فى يوم ما

المجموعات	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	المجموع
التكرار	١٤	٢٧	س	١٦	١٨	١٠٠

① أوجد قيمة س [٢٥]

② أوجد الوسط الحسابى [٢٩,٧]

③ أوجد عدد المناطق التى تقل درجة الحرارة فيها عن ٢٥ درجة [٤١]

(٧) الجدول التكرارى الآتى يبين التوزيع التكرارى لعدد أيام الأجازات بأحد المصانع لعدد ٥٠ عامل

المجموعات	٢-	٦-	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-
التكرار	٤	٥	٨	ك - ٢	٧	٥	١

(١) أوجد قيمة ك

(٢) أوجد الوسط الحسابى لهذا التوزيع

(٣) أوجد عدد العمال الذين لا تقل أجازاتهم عن ١٤

(٨) أكمل ما يأتى :

(١) إذا كان الحد الأدنى لمجموعة ٨ والحد الأعلى لها ١٤

فإن مركزها = ...

(٢) إذا كان الحد الأدنى لمجموعة ٤ ومركزها ٩

فإن حدها الأعلى = ...

(٣) إذا كان الحد الأعلى لمجموعة ١٦ ومركزها ١٢

فإن الحد الأدنى لها هو ....

(٤) إذا كانت بداية مجموعة هى ١٠ ومركزها هو ١٥

فإن طول المجموعة هو ....

(٥) مركز المجموعة الأولى من المجموعات ٥ - ، ١١ - ، ١٧ - ، ٢٣ - هو ....

(٦) إذا كان الوسط الحسابى لتوزيع تكرارى هو ٣٩,٤ و مجموع تكراراته ١٠٠

فإن مجموع حواصل ضرب تكرار كل مجموعة فى مركزها = ...

مسائل المتفوقين

(٩) الجدول الآتى يبين مجموعات الأجر الأسبوعى بالجنيه لعدد من العمال وحواصل ضرب مراكز المجموعات فى التكرارات هى :

المجموعات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-
م × ك	١٥٠	٥٠٠	١٠٥٠	١١٢٥	٨٢٥

أوجد الوسط الحسابى للأجر الأسبوعى

الوسيط

الوسيط لمجموعة من القيم

هو القيمة التى تتوسط مجموعة القيم بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً بحيث يكون عدد القيم الأصغر منها مساوياً لعدد القيم الأكبر منها

فمثلاً : إذا كان لدينا مجموعة من القيم عددها فردى مثل ١٥ ، ٦ ، ٩ ، ٢ ، ١١

فإن الوسيط هو القيمة التى تقع فى الوسط تماماً بعد ترتيبها

فإذا رتبنا القيم تصاعدياً كالتالى ٢ ، ٦ ، ٩ ، ١١ ، ١٥

فإن الوسيط الذى ترتيبه $\left(\frac{ن + ١}{٢}\right)$ حيث ن عدد القيم الفردية هو ٩

أما إذا كان عدد القيم زوجى كمجموعة القيم ٨ ، ١٤ ، ٢٦ ، ٥ ، ١٢ ، ٣١

فإن الوسيط هو نصف مجموع القيمتين اللتين تقعان فى الوسط بعد الترتيب

فإذا رتبنا القيم تصاعدياً كالتالى ٥ ، ٨ ، ١٢ ، ١٤ ، ٢٦ ، ٣١

فإن الوسيط الذى ترتيبه $\left(\frac{ن}{٢} ، \frac{ن}{٢} + ١\right)$ حيث ن عدد القيم الزوجية

$= \frac{١٢ + ١٤}{٢} = ١٣$

الوسيط لتوزيع تكرارى ذى المجموعات بيانياً

لإيجاد الوسيط لتوزيع تكرارى بيانياً نتبع الآتى :

(١) نكون جدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد (أو النازل)

(٢) نرسم المنحنى المتجمع الصاعد (أو النازل) لهذا التوزيع

(٣) نوجد ترتيب الوسيط حيث يساوى $\frac{ن}{٢}$ حيث ن مجموع التكرارات

(٤) نعين النقطة $\frac{ن}{٢}$ على المحور الرأسى (التكرار) ونرسم منها مستقيماً أفقياً يقطع المنحنى فى نقطة ثم نسقط من هذه النقطة عمود فيقطع المحور الأفقى فى نقطة تكون هى الوسيط





أمثلة توضيحية

مثال ١ أوجد الوسيط للتوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	صفر-	٤-	٨-	١٢-	١٦-	المجموع
التكرار	٥	١٥	٣٠	٤٠	١٠	١٠٠

الحل

أولاً : باستخدام المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد :

(١) نكون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد كما درسنا

(٢) نرسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد

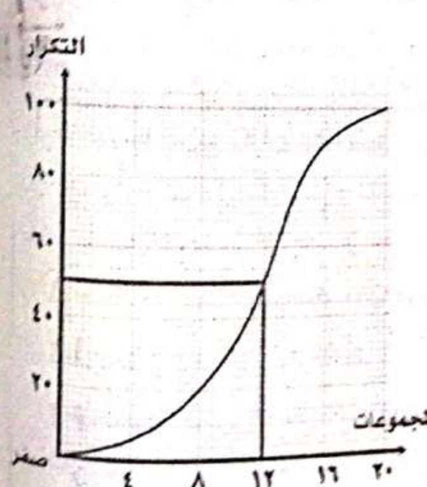
(٣) نوجد ترتيب الوسيط

حيث ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{٢}$

$= \frac{١٠٠}{٢} = ٥٠$

الجدول التكرارى المتجمع الصاعد

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد	زيادة
أقل من صفر	صفر	٥+
أقل من ٤	٥	١٥+
أقل من ٨	٢٠	٣٠+
أقل من ١٢	٥٠	٤٠+
أقل من ١٦	٩٠	١٠+
أقل من ٢٠	١٠٠	



(٤) نعين النقطة ٥٠ على المحور الرأسى (التكرار) ونرسم منها مستقيم أفقى يقطع المنحنى فى نقطة ثم نسقط من هذه النقطة عموداً فيقطع المحور الأفقى (المجموعات) فى نقطة نجد أنها ١٢

∴ الوسيط (من الرسم) = ١٢

ثانياً : باستخدام المنحنى التكرارى المتجمع النازل :

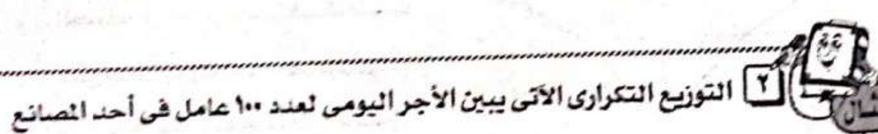
نكون الجدول التكرارى و نرسم المنحنى التكرارى المتجمع النازل كما سبق بنفس الطريقة نوجد الوسيط من المنحنى المتجمع النازل

المنحنى التكرارى المتجمع النازل

الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل	نقص
صفر فأكثر	١٠٠	٥-
٤ فأكثر	٩٥	١٥-
٨ فأكثر	٨٠	٣٠-
١٢ فأكثر	٥٠	٤٠-
١٦ فأكثر	١٠	١٠-
٢٠ فأكثر	صفر	

ترتيب الوسيط = $\frac{١٠٠}{٢} = ٥٠$ ،

∴ الوسيط (من الرسم) = ١٢



مثال ٢ التوزيع التكرارى الآتى يبين الأجر اليومى لعدد ١٠٠ عامل فى أحد المصانع

الأجر بالجنيه	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	المجموع
عدد العمال	١٠	١٥	٢٢	٢٥	٢٠	٨	١٠٠

(١) ارسم المنحنيين المتجمعين الصاعد و النازل لهذا التوزيع معاً

(٢) أوجد الأجر الوسيط لكل منهما

(٣) إذا كان كل ١٠ مم من المحور الأفقى يمثل ٥ جنيهات فأوجد ما يمثله ٢ مم



الحل

(١) الجدول التكراري المتجمع الصاعد

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ١٥	صفر
أقل من ٢٠	١٠
أقل من ٢٥	٢٥
أقل من ٣٠	٤٧
أقل من ٣٥	٧٢
أقل من ٤٠	٩٢
أقل من ٤٥	١٠٠

الجدول التكراري المتجمع النازل

الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
١٥ فأكثر	١٠٠
٢٠ فأكثر	٩٠
٢٥ فأكثر	٧٥
٣٠ فأكثر	٥٣
٣٥ فأكثر	٢٨
٤٠ فأكثر	٨
٤٥ فأكثر	صفر

(٢) نرسم المنحنيين المتجمعين الصاعد و النازل معاً فيتقاطعا في نقطة واحدة نفرضها م من نقطة م نسقط عمود على المحور الأفقي فيقطعه في نقطة هي الوسيط

∴ الأجر الوسيط = ٣١ جنيهاً

(٣) ∵ ١٠ مم = ٥ ∴ $\frac{١٠}{١٠}$ مم = $\frac{٥}{١٠}$

∴ مم = $\frac{١}{٢}$ جنيه ∴ ٢ مم = ٢ × $\frac{١}{٢}$ = ١ جنيه

أمثلة للتدريب

تدريب (١)

الجدول الأتى يبين التوزيع التكرارى لأعمار ٥٠ طالب فى أحد فصول المدرسة

مجموعات العمر بالسنة	١٢-	١٣-	١٤-	١٥-	١٦-	المجموع
عدد الطلاب	١٣	١٢	١٧	٧	١	٥٠

ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد لهذا التوزيع و من الرسم أوجد العمر الوسيط لهذه المجموعة

الحل

الجدول التكرارى المتجمع الصاعد

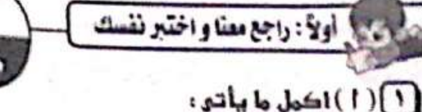
الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ١٢	....
أقل من ١٣	....
أقل من ١٤	....
أقل من ١٥	....
أقل من ١٦	....
أقل من ١٧	....

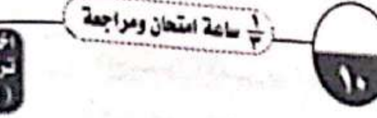
١٢ ١٣

∴ ترتيب الوسيط = $\frac{......}{......}$ = ... ،

∴ الوسيط (من الرسم) = ...

تمارين (١٦) على الوسيط





اختبار تراكمي (٦٤)

١ (أ) اكمل ما يأتى :

① مجموعة حل المتباينة ٣ - ٤س ≤ س - ٢ فى ح هى ....

② المقدار ٢√٥ + ٦√(١/٣) - √١٢ - ٥√(١/٥) فى أبسط صورة = ...

③ العدد √٧ ينحصر بين العددين النسبيين .... ، .... لأقرب رقمين عشريين

④ حجم الكرة التى طول قطرها ٦ سم هو ....

٤ درجات

(ب) إذا كانت س = [-٢، ٣] ، ص =]١، ٥[فأوجد مستعيناً بخط الأعداد

س ∩ ص ، س - ص

....

....

....

٣ درجات

(جـ) الشكل المقابل يمثل حركة سيارة مقيسة من نقطة ثابتة أوجد السرعة المنتظمة للدراجة خلال

① أول ساعتين

② الساعات الثلاث التالية

....

....

....

٣ درجات

ثانياً : أجب عما يأتى :

مسائل المستوى الأول

٢ أكمل ما يأتى :

① الوسيط لمجموعة القيم ٨ ، ٥ ، ٦ ، ٢ ، ٣ هو ....

② الوسيط لمجموعة القيم ٣ ، ١٢ ، ٧ ، ١٩ ، ٦ هو ....

③ الوسيط لمجموعة القيم ٢ ، ٧ ، ٤ ، ٩ ، ٥ ، ١٢ هو ....

④ الوسيط لمجموعة القيم ٦ ، ١٧ ، ٨ ، ١٥ ، ١١ هو ....

⑤ ترتيب الوسيط لمجموعة القيم ٦ ، ٢ ، ٥ ، ٨ ، ١ هو ....

⑥ إذا كان ترتيب الوسيط لمجموعة من القيم هو الرابع فإن عدد هذه القيم ....

⑦ إذا كان الوسيط لمجموعة القيم أ+١ ، أ+٢ ، أ+٥ ، أ+٤ ، أ+٣ هو ٧ فإن أ = ...

٣ باستخدام المنحنى المتجمع الصاعد أوجد الوسيط للتوزيع التكرارى فيما يأتى :

①

المجموعات	٢-	٤-	٦-	٨-	المجموع
التكرار	١	٢	٢	٥	١٠

②

المجموعات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	المجموع
التكرار	٦	٨	٤	٢	٢٠

مسائل المستوى الثانى

٤ فيما يلى توزيع الأجور لبعض العاملين فى أحد المصانع بالجنيه

مجموعات الأجور	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
عدد العمال	٧	٩	١٢	٧	٥	٤٠

أوجد الأجر الوسيط لهذه المجموعة

[٣١]




٥ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ٥٠ طالباً فى أحد الامتحانات

مجموعات الدرجات	٠-	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
عدد الطلاب	٨	١٢	١٨	٧	٣	٢	٥٠

① أوجد الدرجة المتوسطة [٢٣,٢] ② الدرجة الوسيطية [٢٣]

٦ ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد أو النازل وعين الوسيط بيانياً من التوزيعات التكرارية الآتية :

①

المجموعات	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	المجموع
التكرار	٧	٩	١٥	١١	٨	٥٠

[٣٠]

②

المجموعات	٢-	٤-	٦-	٨-	١٠-	١٢-	المجموع
التكرار	٢	٥	٨	١٩	١٤	٢	٥٠

[٩,٥]

③

المجموعات	١٢-	١٣-	١٤-	١٥-	١٦-	المجموع
التكرار	١٣	١٢	١٧	٧	١	٥٠

[١٤]

④

المجموعات	٠-	٤-	٨-	١٢-	١٦-	المجموع
التكرار	٥	١٥	٣٠	٤٠	١٠	١٠٠

[١٢]

⑤

المجموعات	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	٥٥-	٦٥-	المجموع
التكرار	٣	٧	١٠	١٥	١٠	٥	٥٠

[٤٦]

٧ التوزيع التكرارى الآتى يبين عدد أيام غياب ٦٠ طالب خلال العام الدراسى

المجموعات	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	المجموع
التكرار	٦	١١	١٥	١٠	٩	٥	٤	٦٠

أوجد الوسيط مستخدماً المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد [١٩]

٨ من الجدول التكرارى التالى ذى المجموعات المتساوية فى المدى

المجموعات	١٠-	٢٠-	س-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	المجموع
التكرار	١٠	١٧	٢٠	٣٢	ك + ٢	٤	١٠٠

① أوجد قيمة كل من س ، ك [٣٠ ، ١٥]

② ارسم فى شكل واحد المنحنيين المتجمعين الصاعد و النازل ثم احسب الوسيط

مسائل المتفوقين

٩ إذا كان الجدول التكرارى المتجمع الصاعد لتوزيع تكرارى ما تبدأ حدوده العليا للمجموعات بأقل من ٢٠ وحتى أقل من ٤٤ و التكرار المتجمع الصاعد كان على الترتيب كما يلى : ٠ ، ٥ ، ١٥ ، ٣٨ ، ٦٨ ، ٨٨ ، ١٠٠

فأوجد جدول التوزيع التكرارى ثم أوجد الوسيط [٣٤]





المنــــــوال

المنـــوال

هو القيمة الأكثر شيوعا فى المجموعة أو القيمة التى تتكرر أكثر من غيرها

فمثلاً : المنـــوال لمجموعة القيم ٢ ، ٥ ، ٦ ، ٥ ، ٧ ، ٥ هو ٥

و لإيجاد المنوال نتبع الخطوات التالية :

(١) نرسم المدرج التكرارى للتوزيع ثم نرسم مستقيم يصل بين الرأس الأيمن العلوى لأطول مستطيل و بين الرأس الأيمن العلوى للمستطيل السابق له ثم نرسم مستقيم يصل بين الرأس الأيسر العلوى لأطول مستطيل و بين الرأس الأيسر العلوى للمستطيل الذى يليه

(٢) يتقاطع المستقيمان فى نقطة ، نسقط منها عموداً على المحور الأفقى يقطعه فى نقطة فتكون هى المنوال

أمثلة توضيحية

مثال

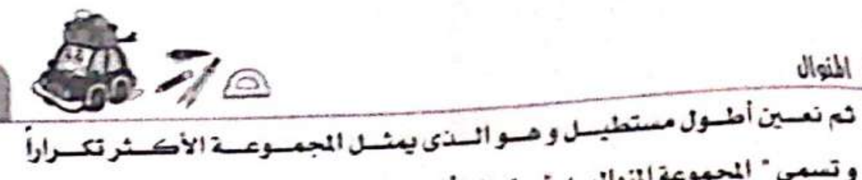
١ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ٥٠ طالب فى أحد الاختبارات

الدرجات	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	٥٥-
عدد التلاميذ	٧	٩	١٢	١٠	٨	٤

ارسم المدرج التكرارى ثم أوجد المنوال

الحل

نرسم المدرج التكرارى كما بالشكل بأن نرسم مستطيلات تمثل كل فترة فمثلاً المستطيل الأول بين النقطتين اللتين تمثلان الفترة (من ٥ إلى ١٥) و يصل لأعلى حتى النقطة المقابلة لتكرار الفترة (٧ تكرار الفترة الأولى)



ثم نعين أطول مستطيل و هو الذى يمثل المجموعة الأكثر تكراراً و تسمى " المجموعة المنواليه " و نصل رأسه العلوى الأيمن بالرأس العلوى الأيمن للمستطيل السابق له و نصل رأسه العلوى الأيسر بالرأس العلوى الأيسر للمستطيل الذى يليه كما بالشكل و نسقط من نقطة تقاطع المستقيمين عموداً على المحور الأفقى فيقطعه فى نقطة فتكون هى المنوال

∴ المنوال = ٣١ درجة



أمثلة للتدريب

تدريب (١)

الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى للأجر الأسبوعى لمائة عامل بالجنيه

مجموعات الأجر	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
عدد العمال	١٠	٢٠	٣٠	٢٥	١٥	١٠٠

ارسم المدرج التكرارى لهذا التوزيع و أوجد الأجر المنوالى

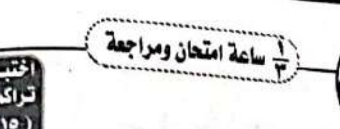
الحل

من الرسم نجد أن المنوال = ... جنيه





تمارين (١٧) على المنوال



أولاً: راجع معنا واختبر نفسك

$\frac{١}{٣}$ ساعة امتحان ومراجعة

١٠

(١) (أ) أكمل ما يأتي:

① $]-\infty ، ٤] \cup]٣ ، \infty[$ = ...

② مجموعة حل المتباينة ٠ ≤ ٢ - $\frac{١}{٢}$ س < ٣ في ح هي ....

③ إذا كانت مساحة الأوجه الستة لمكعب ٥٤ سم^{٢} فإن حجمه = ...

④ إذا كان س = $\frac{\sqrt{٢} - ١}{٣ - \sqrt{٨}}$ ، ص = $\frac{١}{\sqrt{٢} + ١}$ فإن قيمة (س + ص)^{٢} = ...

٤ درجات

(ب) حل المعادلة $\sqrt{٥}$ س - ٣ = ٢ في ح ومثل الحل على خط الأعداد

....

....

....

....

....

٣ درجات

(جـ) أوجد الوسط الحسابي للتوزيع التكراري الآتي:

المجموعات	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	المجموع
التكرار	٦	٨	٤	٢	٢٠

....

....

....

....

....

....

٣ درجات

ثانياً: أجب عما يأتي:

مسائل المستوى الأول

(٢) أكمل ما يأتي:

① المنوال لمجموعة من القيم هو ....

② المنوال للقيم ٢ ، ٣ ، ٧ ، ٣ ، ١ هو ....

③ المنوال للقيم ٧ ، ٥ ، ٢ ، ٧ ، ٣ ، ٧ هو ....

④ المنوال للقيم ٦ ، ٣ ، ٤ ، ٢ ، ١ ، ٦ هو ....

⑤ إذا كان المنوال للقيم ٣ ، ٦ ، ك ، ٧ هو ٦ فإن ك = ...

⑥ إذا كان المنوال للقيم ٦ ، ٥ ، ٣ ، ٢ ، ك + ١ هو ٣ فإن ك = ...

⑦ إذا كان المنوال للقيم ٤ ، ٥ ، ٢ ، س - ١ هو ٤ فإن س = ...

(٣) أوجد المنوال بيانياً للجداول التكرارية الآتية:

①

المجموعات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
التكرار	٧	٩	١٢	٧	٥	٤٠

[٣٢]

②

المجموعات	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	المجموع
التكرار	٥	٢٠	٤٠	٢٥	١٠	١٠٠

[٣٠]

③

المجموعات	٠-	٤-	٨-	١٢-	١٦-	المجموع
التكرار	٧	٩	١١	٨	٥	٤٠

[٩]

④

المجموعات	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	المجموع
التكرار	٤	٦	٨	٧	٥	٣٠

[١٨]



مسائل المستوى الثانى

٤ أوجد المنوال بيانياً للجداول التكرارية الآتية :

①

المجموعات	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-	المجموع
التكرار	١٠	١٢	١٤	٩	٣	٢	٥٠

[٦٤]

②

المجموعات	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	٥٥-	المجموع
التكرار	٥	٦	٩	١٥	٨	٧	٥٠

[٤٠]

③

المجموعات	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	المجموع
التكرار	١٠	١٥	٢٢	٢٥	٢٠	٨	١٠٠

[٥٥]

٥ الجدول الآتى يوضح درجات أحد الفصول فى مادة الرياضيات

مجموعات الدرجات	٠-	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
عدد الطلاب	٣	٥	٦	٥	٤	٢	٢٥

ارسم المدرج التكرارى و أوجد الدرجة المنوالية [٢٥]

٦ فى التوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	٠-	٤-	٨-	١٢-	١٦-	المجموع
التكرار	٥	١٥	٣٠	٤٠	١٠	١٠٠

أوجد :

① الوسط الحسابى [١١,٤]

② الوسيط [١٢]

③ المنوال [١٣]



٧ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى ذا المجموعات متساوية المدى للأجور الأسبوعية لعدد ١٠٠ عامل بأحد المصانع

الأجر بالجنيه	٧٠-	٨٠-	٩٠-	١٠٠-	س-	١٢٠-	١٣٠-
عدد العمال	١٠	١٣	ك - ٤	٢٠	١٦	١٤	١١

أوجد :

① قيمة كل من س ، ك [١١٠ ، ٢٠]

② الأجر المنوالى بالجنيه [١٠٥ جنيها]

مسائل المتفوقين

٨ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لأوزان ٥٠ تلميذاً بالكيلوجرام بإحدى المدارس

الوزن بالكجم	٣٠ -	٣٥ -	٤٠ -	٤٥ -	٥٠ -	٥٥ -	المجموع
عدد التلاميذ	ك + ٤	٣ ك	٤ ك	٣ ك + ١	٣ ك - ١	ك + ١	٥٠

① أوجد قيمة ك [٣]

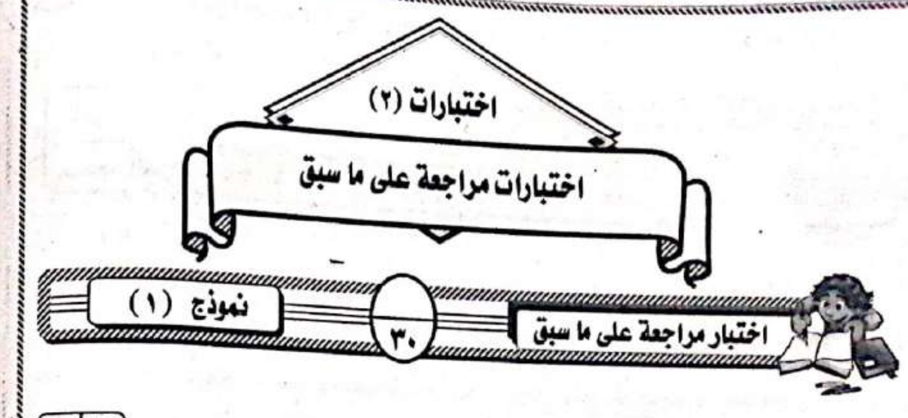
② ارسم المدرج التكرارى و أوجد الوزن المنوالى

٩ أوجد المنوال للجدول التكرارى الآتى :

المجموعات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
التكرار	٥	٢٠	٣٠	٣٠	١٥	١٠٠

[٤٠]





١ أكمل ما يأتي : (١٠ درجات)

① مكعب طول حرفه ٣ سم فإن حجمه = ...

② إذا كان س = ٢ + $\sqrt{٣}$ ، ص = ٢ − $\sqrt{٣}$ فإن $\frac{\text{س + ص}}{\text{س ص}}$ = ...

③ [−٢، ٢] ∪ [٠، ٣] = ...

④ مجموعة حل المتباينة −٣ < ٢س + ١ < ٥ في ح هي ....

---

٢ (١٠ درجات)

(أ) مثل بيانياً المستقيم الذي يمثل العلاقة س + ٢ ص = ٣

(ب) إذا كان س = $\frac{١}{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}}$ ، ص هي المعكوس الضربي للعدد س

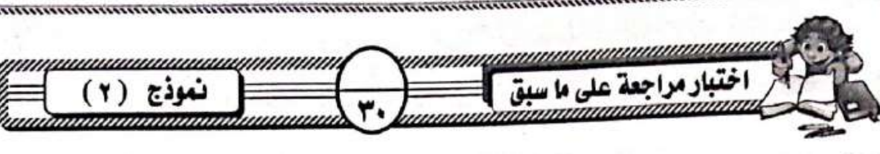
فأوجد ص ثم اثبت أن $(\text{س + ص})^{٢}$ − ٢ = ١٠

---

٣ فيما يلي التوزيع التكراري للأجر الأسبوعي لعمال إحدى المزارع (١٠ درجات)

الأجر بالجنيه	١٥ −	٢٥ −	٣٥ −	٤٥ −	٥٥ −	٦٥ −	٧٥ −
عدد العمال	١٠	١٢	٢٦	٣٠	١٧	١١	٤

أحسب الأجر الوسيط



١ أكمل ما يأتي : (١٠ درجات)

① مجموعة حل المتباينة −٤ −٦ س ≤ ٨ في ح هي ....

② أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٥٠٠ π سم³ وطول نصف قطر قاعدتها ٥ سم يكون ارتفاعها ....

③ $\sqrt[3]{٥٤} + \frac{١٤}{\sqrt{٧}} - \sqrt{٢٨} + \sqrt[3]{-١٦}$ في ابسط صورة = ...

④ [−٢، ٣] − [١، ٥] = ...

---

٢ (١٠ درجات)

(أ) إذا كان س = $\frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ ، ص = $\sqrt{٧} - \sqrt{٣}$

① اثبت أن س ، ص عددان مترافقان ② أوجد $\text{س}^{٣}\ \text{ص}^{٣}$

(ب) الشكل المقابل

يمثل العلاقة بين الزمن س بالساعة وكمية الوقود ص باللتر

فإذا مُلىء خزان سيارة بالبنزين أوجد :

① أكبر سعة للخزان

② متى يفرغ الخزان ؟

③ معدل استهلاك السيارة للبنزين

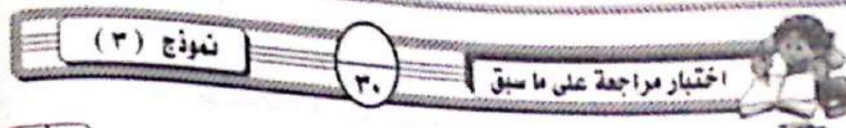
ص باللتر
٦٠
٤٠
٢٠
س بالساعة
١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦

---

٣ أحسب الوسط الحسابي للتوزيع التكراري الآتي : (١٠ درجات)

المجموعات	٥ −	١٥ −	٢٥ −	٣٥ −	٤٥ −	المجموع
التكرار	٧	١٠	١٢	١٣	٨	٥٠





١٠ درجات

① اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :

① $\sqrt{45} - \frac{3}{2}\sqrt{20} - 2\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ = ...

[صفر ، $-\sqrt[3]{2}$ ، $\sqrt[3]{2}$ ، $6\sqrt{5} + \sqrt[3]{2}$]

② إذا كان حجم كرة هو $32\sqrt{3}\,\pi$ سم³ فإن طول نصف قطرها ....

[$2\sqrt{3}$ سم³ ، $2\sqrt{3}$ سم ، 3 سم³ ، 3 سم]

③ إذا كانت س = $\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ ، ص = $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ فإن

س² − ٢ س ص + ص² = ...

[٢ ، ١٢ ، ٢٠ ، $2(\sqrt{5} - \sqrt{3})$]

④ $[2, \infty[- [-2, 3]$ = ...

[ϕ ، $]3, \infty[$ ، $[3, \infty[$ ، $[2, \infty[$]

---

١٠ درجات

② (أ) أوجد في ح مجموعة حل المتباينة ٤ ≤ ١ − س > ٢ في صورة فترة ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد

(ب) الشكل المقابل يمثل حركة دراجة مقاسة من نقطة ثابتة أوجد :

① سرعة الدراجة خلال الساعات الثلاث الأولى

② سرعة الدراجة خلال الساعات الأربع التالية

③ المسافة الكلية التى تحركتها الدراجة

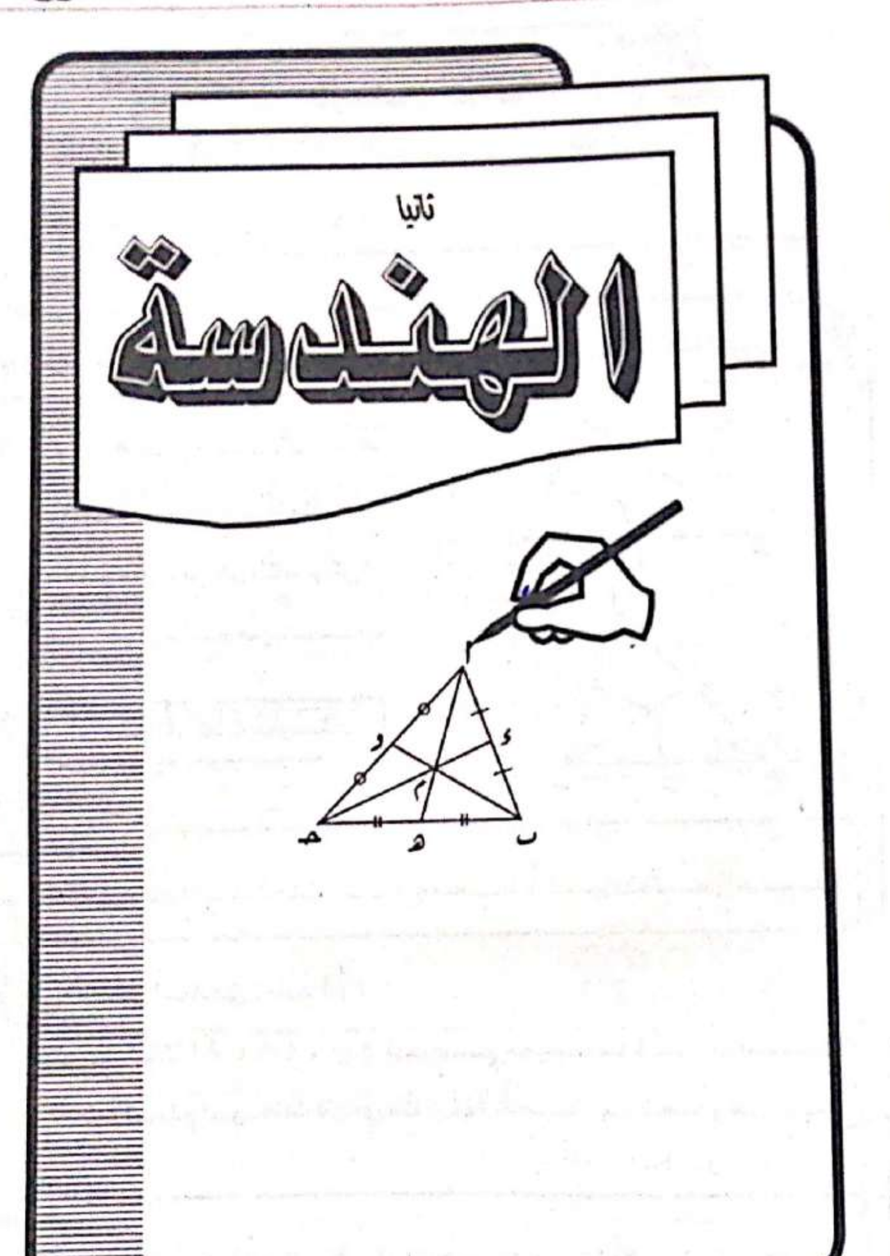
---

١٠ درجات

③ الجدول الآتي لتوزيع تكراري لدرجات ٢٠ طالباً في مادة الرياضيات

الدرجات	٢−	٤−	٦−	٨−	١٠−	المجموع
التكرار	٢	٤	٦	٥	٣	٢٠

① أوجد الوسط الحسابي ② أوجد المنوال بيانياً



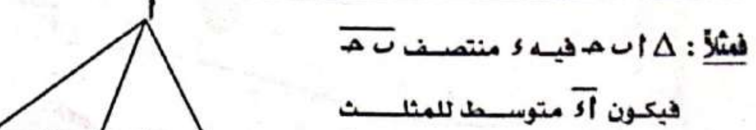




متوسطات المثلث

تعريف

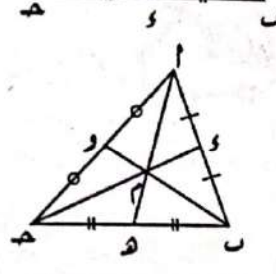
المتوسط فى المثلث هو القطعة المستقيمة المرسومة من أي رأس من رؤوسه إلى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس



فمثلاً : △ اب جـ فيه ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

فيكون $\overline{\text{اء}}$ متوسط للمثلث

وبالطبع كل ضلع فى المثلث يمكن أن ننصفه ونرسم متوسط



أي أن: أي مثلث له ثلاث متوسطات

نظرية

متوسطات المثلث تتقاطع جميعاً فى نقطة واحدة

فمثلاً : فى الشكل السابق نجد أن :

المتوسطات $\overline{\text{اهـ}}$ ، $\overline{\text{جـء}}$ ، $\overline{\text{بو}}$ تتقاطع جميعاً فى نقطة م

ونقطة تقاطع المتوسطات فى أي مثلث لها خاصية مهمة جداً وهى ما يلي :

نظرية

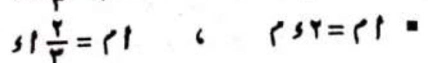
نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة ١:٢ من جهة القاعدة



ملاحظات

- إذا كان $\overline{\text{اء}}$ متوسطاً فى △ اب جـ ، م هي نقطة تقاطع متوسطات المثلث فإننا نستنتج ما يلي :

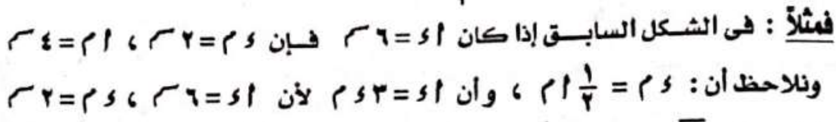




■ ءم = $\frac{1}{2}$ ام ، ءم = $\frac{1}{3}$ اء

■ ام = ٢ءم ، ام = $\frac{2}{3}$ اء

■ اء = ٣ءم ، اء = $\frac{3}{2}$ ام



فمثلاً : فى الشكل السابق إذا كان اء = ٦ سم فإن ءم = ٢ سم ، ام = ٤ سم

ونلاحظ أن: ءم = $\frac{1}{2}$ ام ، وأن اء = ٣ءم لأن اء = ٦ سم ، ءم = ٢ سم

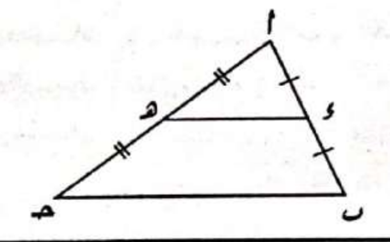
- إذا كان $\overline{\text{اء}}$ متوسطاً فى △ اب جـ ، م ∈ $\overline{\text{اء}}$ بحيث ام = ٢م ء فإن م هي نقطة تقاطع متوسطات △ اب جـ ويكون $\overline{\text{جـهـ}}$ ، $\overline{\text{بو}}$ متوسطان لأنهما يمران بنقطة م وتكون هـ منتصف $\overline{\text{اب}}$ وتكون و منتصف $\overline{\text{اجـ}}$
- إذا كان △ اب جـ متساوي الأضلاع كانت متوسطاته الثلاثة متساوية فى الطول

حقيقة

فى △ اب جـ إذا كان ء منتصف $\overline{\text{اب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{اجـ}}$

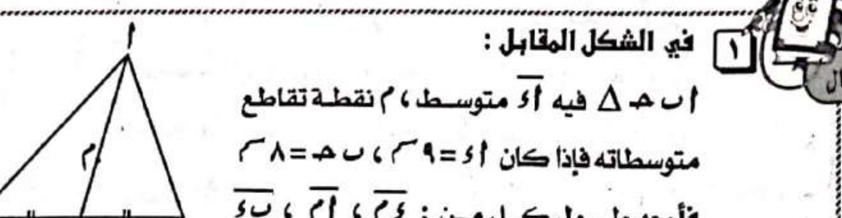
فإن : (١) ءهـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

(٢) $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$





أمثلة توضيحية



(١) في الشكل المقابل :

اب جـ △ فيه $\overline{\text{اء}}$ متوسط ، م نقطة تقاطع متوسطاته فإذا كان اء = ٩ سم ، ب جـ = ٨ سم

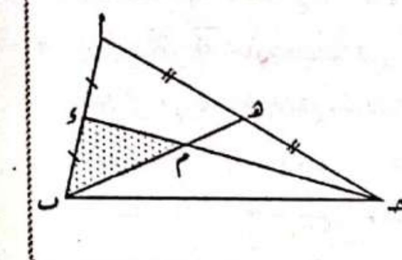
فأوجد طول كل من : $\overline{\text{ءم}}$ ، $\overline{\text{ام}}$ ، $\overline{\text{بء}}$



الحل

المعطيات	م نقطة تقاطع متوسطات △ ، أ ء = ٩ سم ، ب جـ = ٨ سم
المطلوب	طول كل من : ء م ، أ م ، ب ء
البرهان	∵ أ ء متوسط في △ أ ب جـ ، م نقطة تقاطع متوسطاته
	∴ ء م = $\frac{1}{3}$ أ ء ∴ ء م = $\frac{1}{3}$ × ٩ = ٣ سم
	∵ أ م = ٢ م ء ∴ أ م = ٢ × ٣ = ٦ سم
	∵ أ ء متوسط ∴ ب ء = ء جـ
	∵ ب جـ = ٨ سم ∴ ب ء = $\frac{٨}{٢}$ = ٤ سم #

مثال ٢ في الشكل المقابل :



أ ب جـ △ فيه ء ، هـ منتصفي أ ب ، أ جـ على الترتيب فإذا كان ء جـ = ١٢ سم ، ب م = ٦ سم ، أ ب = ٨ سم

فأوجد طول كل من م هـ ، م جـ

ثم أوجد محيط △ م ب ء

الحل

المعطيات	ء ، هـ منتصف أ ب ، أ جـ ، ء جـ = ١٢ سم ، ب م = ٦ سم ، أ ب = ٨ سم
المطلوب	طول كل من م هـ ، م جـ ، محيط △ م ب ء
البرهان	∵ ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ
	∴ جـ ء ، ب هـ متوسطان في △ ، م نقطة تقاطع متوسطاته
	∵ ء جـ = ١٢ سم ، م ء = $\frac{1}{3}$ ء جـ = $\frac{1}{3}$ × ١٢ = ٤ سم
	∴ م جـ = ١٢ - ٤ = ٨ سم
	∵ ب م = ٦ سم ، م هـ = $\frac{1}{2}$ ب م ∴ م هـ = $\frac{1}{2}$ × ٦ = ٣ سم
	∵ أ ب = ٨ سم ، أ ء = ء ب ∴ ء ب = $\frac{٨}{٢}$ = ٤ سم
	∵ محيط △ = مجموع أطوال أضلاعه
	∴ محيط △ م ب ء = م ب + م ء + ء ب
	= ٦ + ٤ + ٤ = ١٤ سم #

مثال ٣ في الشكل المقابل :

أ ب جـ △ فيه ب هـ ، جـ ء متوسطان متقاطعان في م ، ب هـ = ١٥ سم ، جـ ء = ٩ سم ، ب جـ = ١٤ سم

أوجد محيط △ ء هـ م

الحل

المعطيات	ب هـ ، جـ ء متوسطان ، ب هـ = ١٥ سم ، جـ ء = ٩ سم ، ب جـ = ١٤ سم
المطلوب	محيط △ ء هـ م
البرهان	∵ ب هـ ، جـ ء متوسطان في △ أ ب جـ تقاطعا في م
	∴ م نقطة تقاطع متوسطات المثلث
	∴ م تقسم كل منها بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة
	∵ ب هـ = ١٥ سم ، م هـ = $\frac{1}{3}$ ب هـ ∴ م هـ = $\frac{1}{3}$ × ١٥ = ٥ سم
	∵ جـ ء = ٩ سم ، م ء = $\frac{1}{3}$ جـ ء ∴ م ء = $\frac{1}{3}$ × ٩ = ٣ سم
	∵ ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ
	∴ ء هـ // ب جـ ، ء هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ
	∵ ب جـ = ١٤ سم ∴ ء هـ = ٧ سم
	∴ محيط △ ء هـ م = ٥ + ٣ + ٧ = ١٥ سم #

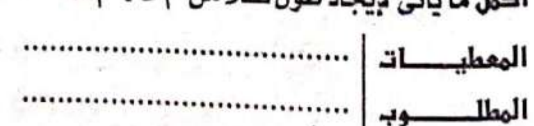
أمثلة للتدريب

تدريب (١)

في الشكل المقابل :

ب هـ ، جـ ء متوسطان في △ أ ب جـ متقاطعان في م حيث جـ ء = ١٥ سم ، ب هـ = ٩ سم

أكمل ما يأتي لإيجاد طول كلاً من م هـ ، م جـ



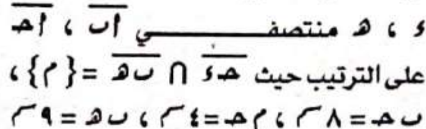
المعطيات	....
المطلوب	....




البرهان	في Δ ا ب جـ ∵ ب هـ ، جـ ء متوسطان متقاطعان في م ∴ م هي نقطة .... ∵ ب هـ = ٩ سم ∴ م هـ = ... ب هـ ∴ م هـ = ... × ٩ = ... سم ∵ جـ ء = ١٥ سم ∴ م جـ = ... جـ ء ∴ م جـ = ... × ١٥ = ... سم

تدريب (٢)

في الشكل المقابل :



ء ، هـ منتصفي أب ، أجـ على الترتيب حيث جـ ء ∩ ب هـ = {م} ،

ب جـ = ٨ سم ، م جـ = ٤ سم ، ب هـ = ٩ سم

أكمل ما يأتي لإيجاد محيط Δ ء م هـ

المعطيات	....
المطلوب	....
البرهان	في Δ ا ب جـ ∵ ب هـ ، جـ ء متوسطان متقاطعان في م ∴ م هي .... ∵ ب هـ = ٩ سم ∴ م هـ = ... ب هـ ∴ م هـ = ... × ٩ = ... سم ∵ م جـ = ٤ سم ∴ م ء = ... م جـ ∴ م ء = ... × ٤ = ... سم في Δ ا ب جـ ∵ ء ، هـ منتصفي أب ، أجـ ∴ ء هـ = ... ب جـ ∵ ب جـ = ٨ سم ∴ ء هـ = ... × ٨ = ... سم ∵ محيط Δ م ء هـ = م ء + ... + ... ∴ محيط Δ م ء هـ = ... + ... + ... = ... سم



تمارين (١) **على متوسطات المثلث** أسئلة الوزارة

أولاً : راجع معنا واختبر نفسك

عزيزي الطالب :

في هذا المكان من كل تمرين ستجد :



أسئلة لمراجعة ما سبق في صورة اختبار تراكمي على ما سبق دراسته تجيبه في نفس الورقة قبل أن تدخل في الدرس الجديد وهذا يجعلك تتذكر ما درست باستمرار ولا تنساه و يجعلك في مراجعة مستمرة لدروسك السابقة مما يجعلك في تواصل مع ما درست و أيضاً يعودك على الأختبارات و يزيل رهبتها في نفسك وهذه الميزة يقدمها لك كتاب الماهر فقط

ثانياً : أجب عما يأتي :

مسائل المستوى الأول

١ أكمل ما يأتي :

(أ) ① متوسطات المثلث تتقاطع ....

② نقطة تقاطع متوسطات Δ تقسم كل منها بنسبة .... من جهة الرأس

(ب) في الشكل المقابل :

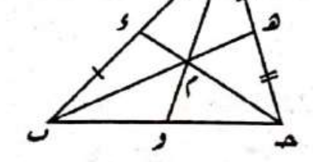
Δ ا ب جـ فيه ء ، هـ منتصفي أب ، أجـ

ء م = ٢ سم ، م ب = ٦ سم ، م و = ٢,٥ سم فإن :

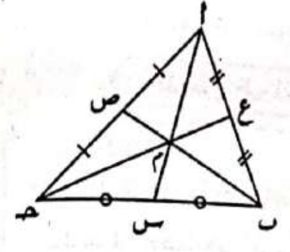
م جـ = ... سم ، م هـ = ... سم

م أ = ... سم ، أ و = ... سم

جـ ء = ... سم ، ب هـ = ... سم



(حـ) في الشكل المقابل :



ع ، س ، ص منتصفات $\overline{أب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{أحـ}$

إذا كان أ م = ٨ سم فإن أ س = ... سم

إذا كان أ ب = ١٠ سم فإن أ ع = ... سم

إذا كان م ص = ٨ سم فإن ب م = ... سم

إذا كان حـ ع = ٩ سم فإن ع م = ... سم

[٢] اختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس :

① نقطة تقاطع متوسطات △ تقسم كل منها بنسبة .... من جهة القاعدة

[١ : ٢ أ ٢ : ١ أ ٣ : ٢ أ ٣ : ١]

② في △ أ ب حـ إذا كانت نقطة ء منتصف $\overline{ب حـ}$ فإن $\overline{أء}$ تسمى ....

[ارتفاع أ متوسط أ وتراً أ منصف للزاوية أ]

③ عدد متوسطات المثلث ...... [واحد أ اثنين أ ثلاثة أ عدد لا نهائي]

④ في △ أ ب حـ إذا كان $\overline{أء}$ متوسط ، م نقطة تقاطع متوسطاته فإن ء م = ... أ ء

[٢ أ $\frac{١}{٢}$ أ $\frac{٢}{٣}$ أ $\frac{١}{٣}$]

⑤ في △ أ ب حـ إذا كان $\overline{أء}$ متوسط ، م نقطة تقاطع متوسطاته فإن أ م : أ ء = ...

[٢ : ١ أ ١ : ٢ أ ٣ : ٢ أ ٢ : ٣]

⑥ في △ أ ب حـ إذا كان $\overline{أء}$ متوسط ، م نقطة تقاطع متوسطاته ، أ م = ٦ سم

فإن م ء = ... سم [٢ أ ٣ أ ١٢ أ ١٨]

⑦ في △ أ ب حـ إذا كان $\overline{أء}$ متوسط ، م نقطة تقاطع متوسطاته ، م ء = ٢ سم

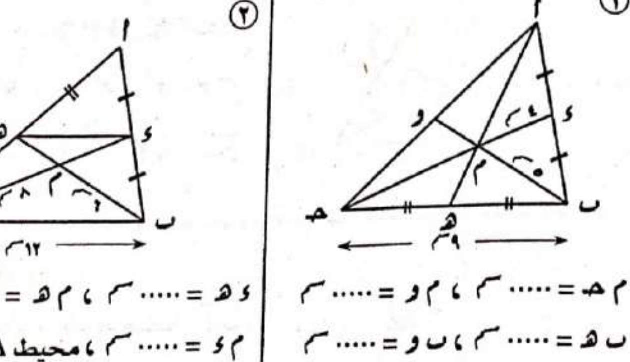
فإن أ م = ... سم [٦ أ ٤ أ ٣ أ ١]

⑧ في △ أ ب حـ إذا كان $\overline{أهـ}$ متوسط ، م نقطة تقاطع متوسطاته ، م هـ = ٤ سم

فإن أ هـ = ... سم [٢ أ ٨ أ ١٢ أ ٦]

[٣] أكمل ما يأتي باستخدام معطيات كل شكل :

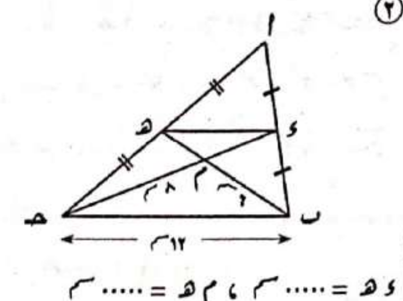
①



م حـ = ... سم ، م و = ... سم

ب هـ = ... سم ، ب و = ... سم

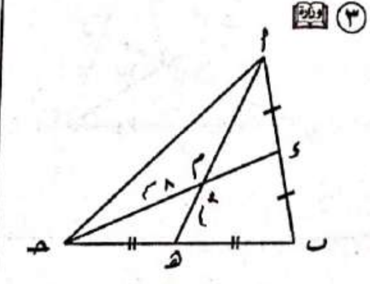
②



ء هـ = ... سم ، م هـ = ... سم

م ء = ... سم ، محيط △ ء م هـ = ... سم

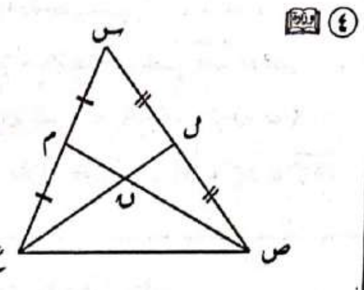
③



م أ = ... سم ، م ء = ... سم

م هـ = ... أ هـ ، م حـ = ... حـ ء

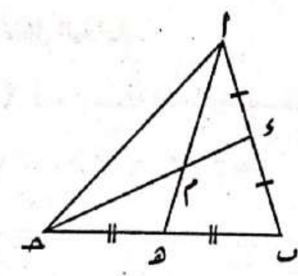
④



إذا كان ل ع = ١٥ سم ، ص م = ١٨ سم ، س ص = ٢٠ سم فإن ن ل = ... سم ، ن ص = ... سم ، محيط △ ن ل ص = ... سم

مسائل المستوى الثاني

[٤] في الشكل المقابل :



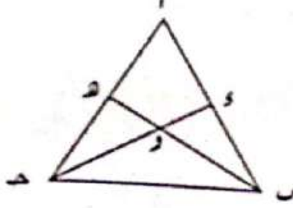
أ ب حـ △ فيه ء ، هـ منتصفي $\overline{أب}$ ، $\overline{ب حـ}$ على الترتيب ، $\overline{أهـ} \cap \overline{حـ ء} = \{م\}$ ، حـ ء = ١٥ سم

أوجد طول كل من : $\overline{ء م}$ ، $\overline{حـ م}$

[٥ سم ، ١٠ سم]

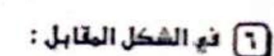


(٥) في الشكل المقابل :

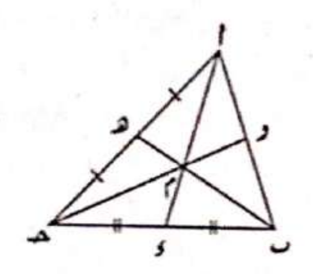


ب هـ ، جـ ء متوسطان في △ ا ب جـ تقاطعا في و ، جـ و = ٤ سم ، و هـ = ٣ سم فاحسب طول كل من : و ء ، ب و

[٢ سم ، ٦ سم]



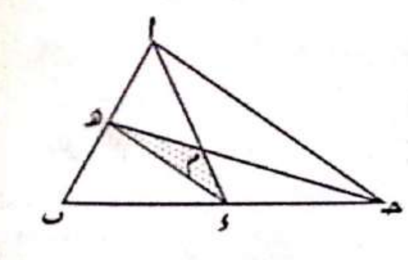
(٦) في الشكل المقابل :



ا ب جـ △ ، ء منتصف ب جـ ، هـ منتصف ا جـ ، فإذا تقاطع ا ء ، ب هـ في م ، رسم جـ م فقطع ا ب في و ، وكان جـ و = ٩ سم ، ا ب = ٦ سم فأوجد طول كل من : ا و ، م و ، م جـ

[٣ سم ، ٣ سم ، ٦ سم]

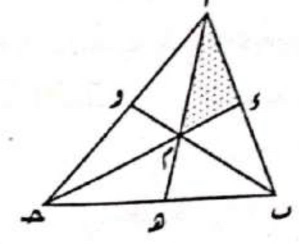
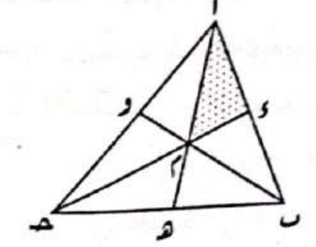
(٧) في الشكل المقابل :



ا ب جـ △ ، ا ء ، جـ هـ متوسطان فيه يتقاطعان في م ، ا ء = ٩ سم ، ا جـ = جـ هـ = ١٢ سم أوجد محيط △ م ء هـ

[١٣ سم]

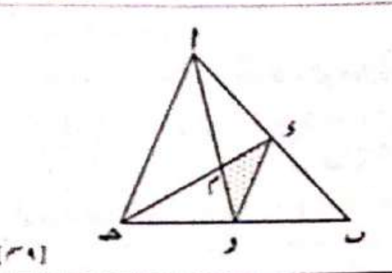
(٨) في الشكل المقابل :

ا ب جـ △ فيه م نقطة تقاطع متوسطاته ، ا ب = ١٠ سم ، هـ م = ٣ سم ، م جـ = ٨ سم أوجد محيط △ ا ء م

[١٥ سم]

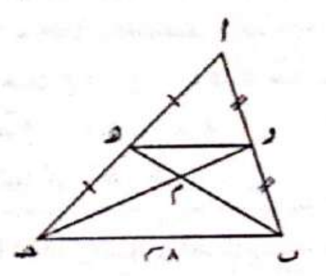
(٩) في الشكل المقابل :



ا و ، جـ ء متوسطان في △ ا ب جـ تقاطعا في م ومحيط △ ا م جـ = ١٨ سم فأوجد محيط △ م و ء

[٩ سم]

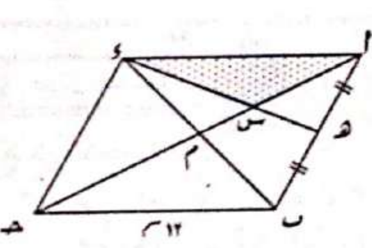
(١٠) في الشكل المقابل :



ا ب جـ △ فيه و منتصف ا ب ، هـ منتصف ا جـ ، ب هـ ∩ و جـ = {م} فإذا كان ب جـ = ٨ سم ، ب م = ٤ سم ، جـ م = ٦ سم فأوجد محيط △ م و هـ

[٩ سم]

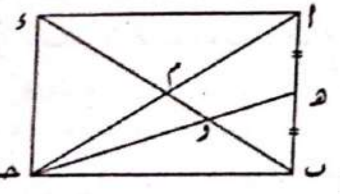
(١١) في الشكل المقابل :



ا ب جـ ء متوازي أضلاع فيه ب جـ = ١٢ سم ، تقاطع قطراه في م ، هـ منتصف ا ب ، ا جـ ∩ ء هـ = {س} ، ء هـ = ١٢ سم ، ا م = ٩ سم أوجد محيط △ ا س ء

[٢٦ سم]

(١٢) في الشكل المقابل :



ا ب جـ ء مستطيل تقاطع قطراه في م ، هـ منتصف ا ب ، هـ جـ ∩ ب ء = {و} ، ب و = ٤ سم

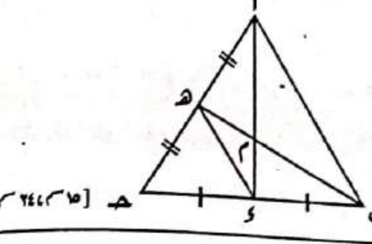
① اثبت أن : و نقطة تقاطع متوسطات △ ا ب جـ

② أوجد طول ا م

[٦ سم]



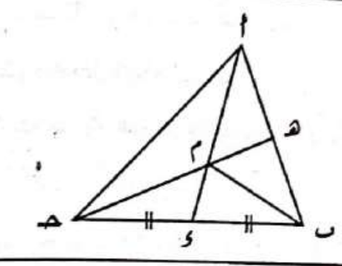
(١٣) **في الشكل المقابل :**



ا ب جـ Δ فيه اد ، ب هـ متوسطان ،
اد ∩ ب هـ = { م } ، ب هـ = ١٢ سم ،
ا د = ٩ سم ، د هـ = هـ جـ = ٥ سم
أوجد محيط كل من : Δ ا م هـ ، Δ ا م ب
[١٥ سم ، ٢٤ سم]

---

(١٤) **في الشكل المقابل :**

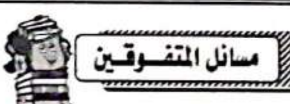


م ب جـ Δ ، د منتصف ب جـ ، ا ∈ د م ،
بحيث م ا = ٢ م د ، هـ ∈ جـ م بحيث
جـ م ∩ ا ب = { هـ }
أثبت أن : ا هـ = هـ ب

---

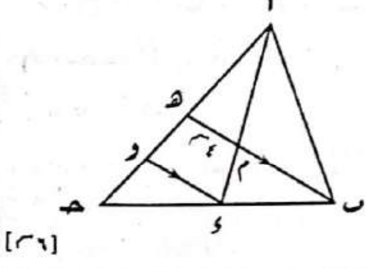
(١٥) ا ب جـ د متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م ، هـ منتصف ب جـ ، رسمت د هـ فقطعت ا جـ في و أثبت أن :

(١) ب و ينصف جـ د   (٢) جـ و = $\frac{1}{3}$ ا جـ



مسائل المتفوقين

(١٦) **في الشكل المقابل :**



ا ب جـ Δ فيه ا د متوسط ، م ∈ ا د
بحيث ا م = ٢ م د ، ب م ∩ ا جـ = { هـ } ،
و ∈ هـ جـ بحيث د و // ب هـ ، م هـ = ٤ سم
أوجد طول د و
[٦ سم]

---

(١٧) ا ب جـ Δ فيه د منتصف ب جـ ، م ∈ ا د بحيث ا م = ٢ م د ، رسم جـ م فقطع ا ب في هـ ، و ∈ ب جـ بحيث ب جـ = جـ و أثبت أن : ا و = ٣ جـ م

---

(١٨) ا ب جـ Δ ، م نقطة تقاطع متوسطاته ا د ، ب هـ ، جـ و
أثبت أن : م نقطة تقاطع متوسطات Δ د هـ و



متوسط المثلث القائم

نظرية

طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوي نصف طول وتر هذا المثلث

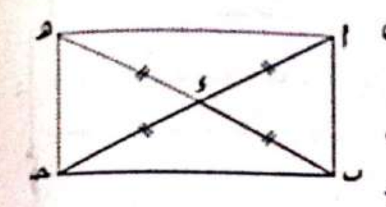
المعطيات	ا ب جـ مثلث فيه ق(∠ب) = ٩٠° ب د متوسط في Δ ا ب جـ
المطلوب	إثبات أن ب د = $\frac{1}{2}$ ا جـ
العمل	نرسم ب د ونأخذ نقطة هـ ∈ ب د بحيث ب د = د هـ
البرهان	∵ الشكل ا ب جـ هـ فيه ا جـ ، ب هـ ينصف كل منهما الآخر ∴ الشكل ا ب جـ هـ متوازي أضلاع ∵ ق(∠ب) = ٩٠° ∴ الشكل ا ب جـ هـ مستطيل ∴ ب هـ = ا جـ ، ب د = $\frac{1}{2}$ ب هـ ∴ ب د = $\frac{1}{2}$ ا جـ #

فمثلاً : إذا كان Δ ا ب جـ قائم الزاوية في ب ،
ا جـ = ٨ سم ، د منتصف ا جـ
فإن طول المتوسط ب د = ٤ سم



عكس النظرية

إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من إحدى رؤوسه يساوي نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة



المعطيات: أ ب جـ مثلث ، $\overline{ب د}$ متوسط ،
د أ = د ب = د جـ

المطلوب: إثبات أن ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠°

العمل: نرسم $\overleftrightarrow{ب د}$ و ناخذ نقطة هـ ∈ $\overrightarrow{ب د}$
بحيث ب د = د هـ

البرهان: ∵ ب د = $\frac{١}{٢}$ ب هـ = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

∴ ب هـ = أ جـ

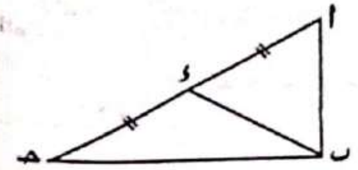
∵ الشكل أ ب جـ هـ فيه $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{ب هـ}$ متساويان فى الطول و ينصف كل منهما الآخر

∴ الشكل أ ب جـ هـ مستطيل

∴ ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠°

#

فمثلاً: فى △ أ ب جـ

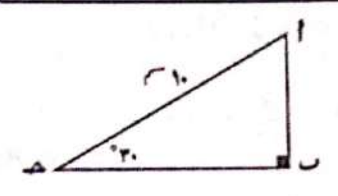


إذا كان طول المتوسط
$\overline{ب د}$ = $\frac{١}{٢}$ طول $\overline{أ جـ}$
فإن △ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب
أي فى الزاوية التي خرج منها المتوسط و إذا كان
أ جـ = ١٠ سم ، د منتصف $\overline{أ جـ}$ ، ب د = ٥ سم فإن ق (∠ ب) = ٩٠°



نتيجة هامة

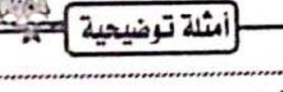
طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى نصف طول الوتر



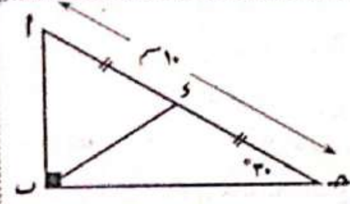
فمثلاً: فى △ أ ب جـ القائم الزاوية فى ب ،
ق (∠ جـ) = ٣٠° إذا كان أ جـ = ١٠ سم
فإن أ ب = ٥ سم لأنه الضلع المقابل
للزاوية التي قياسها ٣٠°

ملاحظة

- المثلث القائم الزاوية الذي قياس إحدى زواياه ٣٠° يكون قياس الزاوية الثالثة فيه ٦٠° ، و لذلك يسمى مثلث ثلاثيني ستيني



أمثلة توضيحية



مثال ١ في الشكل المقابل :
أ ب جـ △ فيه ق (∠ ب) = ٩٠° ،
ق (∠ جـ) = ٣٠° ، أ جـ = ١٠ سم ،
د منتصف $\overline{أ جـ}$ أوجد محيط △ أ ب د

الحل

المعطيات: ق (∠ ب) = ٩٠° ، ق (∠ جـ) = ٣٠° ، أ جـ = ١٠ سم

المطلوب: محيط △ أ ب د

البرهان: ∵ △ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب ، ق (∠ جـ) = ٣٠°

∴ أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ جـ = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥ سم

∵ د منتصف $\overline{أ جـ}$ ∴ أ د = $\frac{١}{٢}$ أ جـ = ٥ سم

∵ $\overline{ب د}$ متوسط فى △ أ ب جـ القائم الزاوية فى ب

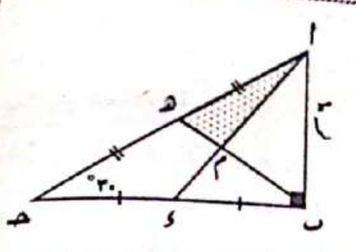
∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ أ جـ = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥ سم

محيط △ أ ب د = أ ب + ب د + د أ

= ٥ + ٥ + ٥ = ١٥ سم

#

[٢] في الشكل المقابل :



أ ب جـ △ قائم الزاوية في ب ،
هـ منتصف $\overline{أجـ}$ ، ء منتصف $\overline{بجـ}$ ،
$\overline{بهـ} \cap \overline{أء} = \{م\}$ ، ق(∠جـ) = ٣٠° ،
أب = ٦ سم ، أء = ٧,٥ سم
أوجد محيط △ أ م هـ

الحل

المعطيات : هـ ، ء منتصفى $\overline{أجـ}$ ، $\overline{بجـ}$ ، أب = ٦ سم ، أء = ٧,٥ سم ، ق(∠جـ) = ٣٠°

المطلوب : محيط △ أ م هـ

البرهان : ∵ △ أ ب جـ قائم الزاوية في ب ، ق(∠جـ) = ٣٠°
∴ أب = $\frac{١}{٢}$ أجـ
∵ أب = ٦ سم ∴ أجـ = ١٢ سم
∵ هـ منتصف $\overline{أجـ}$ ∴ أهـ = هـ جـ = ٦ سم
∵ $\overline{بهـ}$ متوسط △ أ ب جـ القائم الخارج من رأس القائمة
∴ ب هـ = $\frac{١}{٢}$ أجـ ∴ ب هـ = ٦ سم
∵ $\overline{أء}$ ، $\overline{بهـ}$ متوسطان متقاطعان في م
∴ م نقطة تقاطع متوسطات △ أ ب جـ
∴ م هـ = $\frac{١}{٣}$ ب هـ = $\frac{١}{٣}$ × ٦ = ٢ سم
∵ أء = ٧,٥ سم ∴ أم = $\frac{٢}{٣}$ أء = $\frac{٢}{٣}$ × ٧,٥ = ٥ سم
∴ محيط △ أ م هـ = أهـ + م هـ + أم
= ٦ + ٢ + ٥ = ١٣ سم

#

[٣] في الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعي فيه
ق(∠أ ب ء) = ق(∠أ جـ ء) = ٩٠° ،
هـ منتصف $\overline{أء}$
أثبت أن △ هـ ب جـ متساوي الساقين



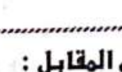
الحل

المعطيات : ق(∠أ ب ء) = ق(∠أ جـ ء) = ٩٠° ، هـ منتصف $\overline{أء}$

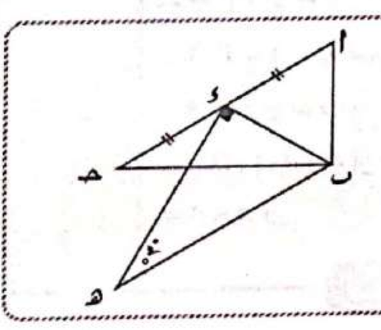
المطلوب : △ هـ ب جـ متساوي الساقين

البرهان : ∵ △ أ ب ء قائم الزاوية في ب ، هـ منتصف الوتر $\overline{أء}$
∴ ب هـ = $\frac{١}{٢}$ أء (١)
∵ △ أ جـ ء قائم الزاوية في جـ ، هـ منتصف الوتر $\overline{أء}$
∴ جـ هـ = $\frac{١}{٢}$ أء (٢)
من (١) ، (٢) ينتج أن ب هـ = جـ هـ
∴ △ ب هـ جـ فيه ب هـ = جـ هـ
∴ △ ب هـ جـ متساوي الساقين

#



[٤] في الشكل المقابل :



أ ب جـ △ فيه ء منتصف $\overline{أجـ}$ ،
ق(∠ب ء هـ) = ٩٠° ،
ق(∠ب هـ ء) = ٣٠° ،
أجـ = ب هـ
أثبت أن ق(∠أ ب جـ) = ٩٠°

الحل

المعطيات : ء منتصف $\overline{أجـ}$ ، ق(∠ب ء هـ) = ٩٠° ، ق(∠ب هـ ء) = ٣٠° ، أجـ = ب هـ

المطلوب : ق(∠أ ب جـ) = ٩٠°

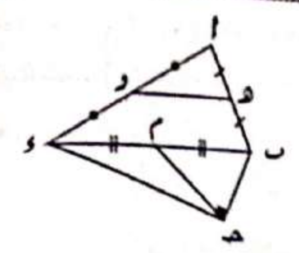
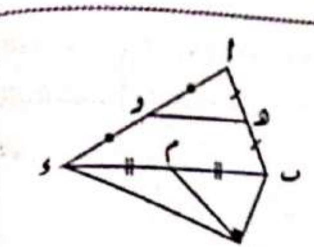
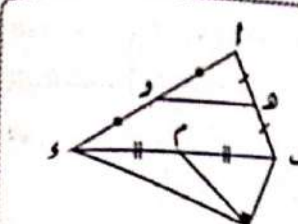
البرهان : ∵ △ ب ء هـ قائم الزاوية في ء ، ق(∠هـ) = ٣٠°
∴ ب ء = $\frac{١}{٢}$ ب هـ
∵ أجـ = ب هـ ∴ ب ء = $\frac{١}{٢}$ أجـ
∵ $\overline{بء}$ متوسط في △ أ ب جـ ، ب ء = $\frac{١}{٢}$ أجـ
∴ ق(∠أ ب جـ) = ٩٠°

#




٥ في الشكل المقابل :

ا ب جـ د شكل رباعي فيه
ق (∠ ب جـ د) = ٩٠° ، هـ ، و ، م منتصفات اب ، اد ، ب د على الترتيب
اثبت أن ، جـ م = هـ و

الحل

المعطيات	ق (∠ ب جـ د) = ٩٠° ، هـ ، و ، م منتصفات اب ، اد ، ب د
المطلوب	جـ م = هـ و
البرهان	∵ Δ ب جـ د فيه ق (∠ ب جـ د) = ٩٠° ، جـ م متوسط ∴ جـ م = $\frac{1}{2}$ ب د (نظرية) (١) ∵ Δ ا ب د فيه هـ منتصف اب ، و منتصف اد ∴ هـ و = $\frac{1}{2}$ ب د (نظرية) (٢) من (١) ، (٢) ينتج أن : جـ م = هـ و #



تدريب (١)

في الشكل المقابل :

ا ب جـ Δ قائم الزاوية فى ب ،
ق(∠جـ)=٣٠° ، ا جـ = ٨ سم ،
د منتصف ا جـ

أكمل البرهان الآتي لإيجاد محيط Δ ا ب د

المعطيات	....
المطلوب	....

البرهان	∵ د منتصف ا جـ ∴ ب د متوسط فى Δ ا ب جـ ∵ ق (∠ ا ب جـ) = ٩٠° ∴ ب د = ... ا جـ ∵ ا جـ = ... سم ∴ ب د = ... سم (١) ∵ Δ ا ب جـ فيه ق (∠ ب) = ٩٠° ، ق (∠ جـ) = ٣٠° ∴ ا ب = $\frac{.....}{.....}$ × .... = ... سم (٢) ∵ د منتصف ا جـ ، ا جـ = ٨ سم ∴ ا د = ... (٣) من (١) ، (٢) ، (٣) : ∵ محيط Δ ا ب د = ا ب + ... + ... ∴ محيط Δ ا ب د = ... + ... + ... = ... سم #

تدريب (٢)

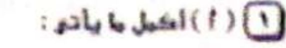
في الشكل المقابل :

ق (∠ ا ب جـ) = ق (∠ ا د جـ) = ٩٠° ،
ق (∠ ا جـ ب) = ٣٠° ، هـ منتصف ا جـ

أكمل البرهان الآتي لإثبات أن ا ب = د هـ

المعطيات	....
المطلوب	....
البرهان	∵ Δ ا ب جـ فيه ق (∠ ب) = ٩٠° ، ق (∠ جـ) = ٣٠° ∴ ا ب = ... (١) ∵ هـ منتصف ا جـ ∴ د هـ متوسط فى Δ .... ∵ Δ ا د جـ فيه ق (∠ د) = ٩٠° ، د هـ متوسط ∴ د هـ = ... (٢) من (١) ، (٢) ينتج أن .... = ... #

تمارين (٢) على متوسط المثلث القائم



أولاً: راجع معنا واختبر نفسك — ١٠ — ½ ساعة امتحان ومراجعة

(١) (أ) أكمل ما يأتي:

١ متوسطات المثلث تتقاطع ....

٢ نقطة تقاطع متوسطات Δ تقسم كل منها بنسبة .... من جهة القاعدة

٣ إذا كان $\overline{اء}$ متوسط في Δ ا ب جـ ، م نقطة تقاطع متوسطاته فإن ا م : م ء = ...

٤ إذا كان $\overline{اء}$ متوسط في Δ ا ب جـ ، م نقطة تقاطع متوسطاته وكان ا م = ٤ سم فإن ا ء = ... سم

٤ درجات

(ب) في الشكل المقابل: $\overline{ب هـ}$ ، $\overline{جـ ء}$ متوسطات في Δ ا ب جـ متقاطعان في م ، ء م = ٣ سم ، ء هـ = ٤ سم ، م هـ = ٢ سم أوجد محيط Δ ب م جـ

....

....

....

....

٣ درجات

(جـ) ا ب جـ Δ ، ء منتصف $\overline{ب جـ}$ ، م ∈ $\overline{اء}$ بحيث ا م = ٢ م ء ، رسم $\overrightarrow{جـ م}$ فقطع $\overline{ا ب}$ في هـ فإذا كان هـ جـ = ١٢ سم أوجد طول $\overline{هـ م}$

....

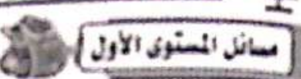
....

....

٣ درجات



ثانياً: أجب عما يأتي:



مسائل المستوى الأول

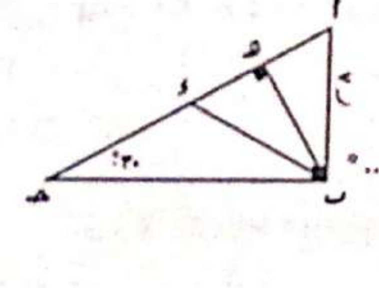
(٢) أكمل ما يأتي:

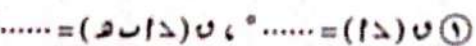
(أ) في الشكل المقابل: ا ب جـ Δ قائم الزاوية في ب ، ء منتصف $\overline{ا جـ}$ ، $\overline{ء هـ} \perp \overline{ب جـ}$ ، ق(∠جـ) = ٣٠° ، ب ء = ٥ سم فإن:

١ ا جـ = ... سم ، ا ء = ... سم

٢ ا ب = ... سم ، ء هـ = ... سم

(ب) في الشكل المقابل: ا ب جـ Δ قائم الزاوية في ب ، ء منتصف $\overline{ا جـ}$ ، ق(∠جـ) = ٣٠° ، ب ا = ٨ سم ، $\overline{ب هـ} \perp \overline{ا جـ}$ فإن:





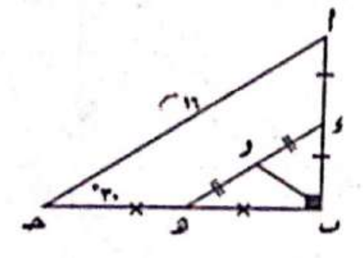
١ ق(∠ا) = ...° ، ق(∠ا ب هـ) = ...°

٢ ا جـ = ... سم ، ا ء = ... سم

٣ ب ء = ... سم ، ا هـ = ... سم

٤ محيط Δ ا ب ء = ... سم

(جـ) في الشكل المقابل: ا ب جـ Δ قائم الزاوية في ب ، ق(∠جـ) = ٣٠° ، ء ، هـ منتصفي $\overline{ا ب}$ ، $\overline{ب جـ}$ على الترتيب ، و منتصف $\overline{ء هـ}$ ، ا جـ = ١٦ سم فإن:



١ ا ب = ... سم ، ء هـ = ... سم

٢ ء ب = ... سم ، ب و = ... سم

٣ ق(∠ب هـ ء) = ...° ، محيط Δ ء ب و = ... سم



٣ اختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس :

(١) طول متوسط △ القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوي .... الوتر

[طول أ، نصف طول أ، ضعف طول أ، ثلث طول]

(٢) طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠° في أي مثلث يساوي ....

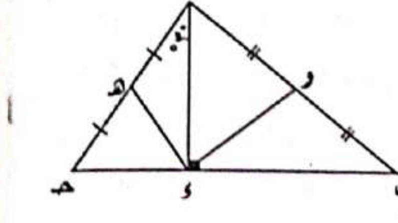
[طول الوتر أ، نصف طول الوتر أ، ضعف طول الوتر أ، ليس أي منها لان المثلث ليس قائم]

(٣) طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠° في △ القائم الزاوية يساوي .... الوتر

[نصف طول أ، ضعف طول أ، طول أ، ثلث طول]



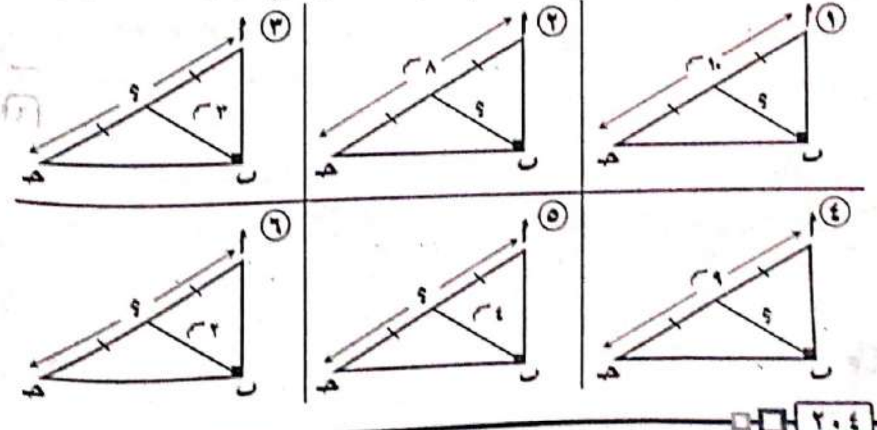
(٤) في الشكل المقابل :



إذا كان $\overline{أء} \perp \overline{بجـ}$ ، و منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أجـ}$ ، ق(∠ ء أ جـ) = ٣٠° ، أ ب = ١٠ سم ، ء هـ = ٤ سم فإن :

ء و = ... سم	[١٠ أ، ٥ أ، ٢٠ أ، ٢,٥]
أ جـ = ... سم	[٤ أ، ٨ أ، ١٦ أ، ١٢]
ء جـ = ... سم	[٤ أ، ٨ أ، ٥ أ، ١٠]
ب ء = ... سم	[٥ أ، ١٠ أ، ٤ أ، ب جـ - ٤]

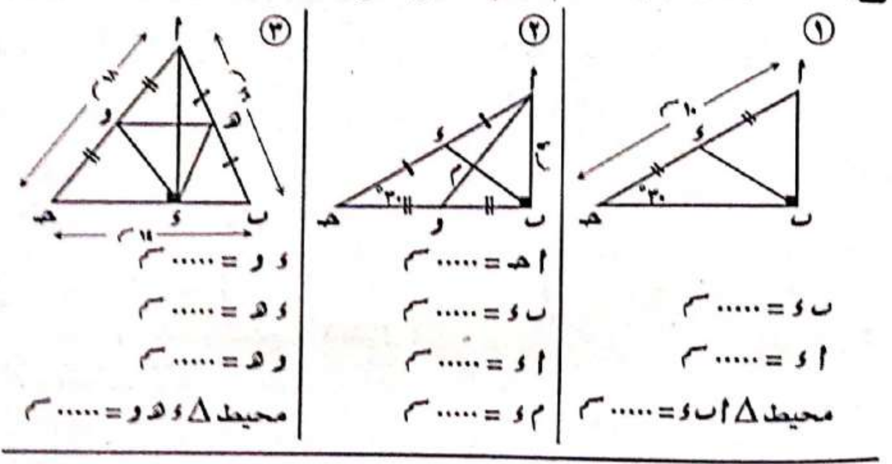
٤ أوجد مستعيناً بالمعطيات التي على الرسم أطوال الأضلاع التي عليها العلامة (؟) :





(٧) ١٠ سم ، ٣٠° ، ؟
(٨) ١٤ سم ، ٣٠° ، ؟
(٩) ؟ ، ٣٠° ، ٩ سم
(١٠) ؟ ، ٣٠° ، ٣ سم
(١١) ؟ ، ٦٠° ، ٤ سم
(١٢) ١٥ سم ، ٦٠° ، ؟

٥ أكمل ما يأتي باستخدام معطيات كل شكل :

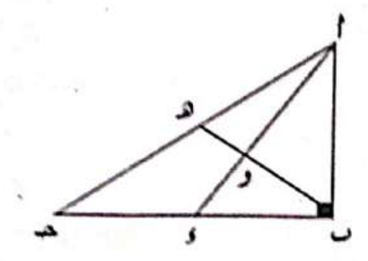


(١)
ب ء = ... سم
أ ء = ... سم
محيط △ أ ب ء = ... سم

(٢)
أ جـ = ... سم
ب ء = ... سم
أ ء = ... سم
م ء = ... سم

(٣)
ء و = ... سم
ء هـ = ... سم
و هـ = ... سم
محيط △ ء هـ و = ... سم

٦ في الشكل المقابل :



أ ب جـ △ قائم الزاوية في ب ، $\overline{بهـ}$ ، $\overline{أء}$ متوسطان متقاطعان في و فإذا كان أ جـ = ١٢ سم فأوجد طول $\overline{بو}$

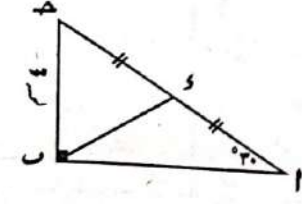
(٧) في الشكل المقابل :

أ ب جـ △ قائم الزاوية فى ب ، ق(∠أ) = ٣٠° ،

د منتصف $\overline{أجـ}$ ، ب جـ = ٤ سم

أثبت أن : △ د ب جـ متساوي الأضلاع

وأوجد محيطه



[١٢ سم]

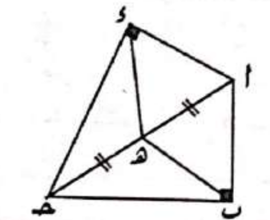
(٨) في الشكل المقابل :

أ ب جـ د شكل رباعي فيه

ق(∠ب) = ق(∠د) = ٩٠° ،

هـ منتصف $\overline{أجـ}$

أثبت أن : ب هـ = هـ د



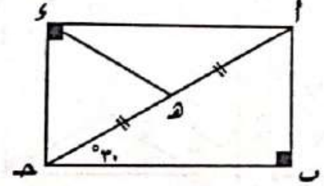
(٩) في الشكل المقابل :

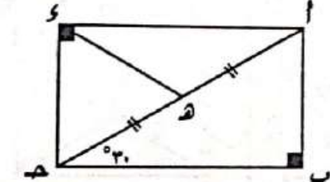
أ ب جـ د مستطيل فيه

ق(∠أ جـ ب) = ٣٠° ،

هـ منتصف $\overline{أجـ}$

أثبت أن : أ ب = د هـ





(١٠) في الشكل المقابل :

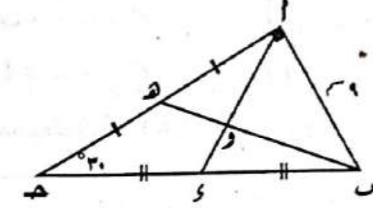
أ ب جـ △ قائم الزاوية فى أ ،

د منتصف $\overline{ب جـ}$ ، هـ منتصف $\overline{أجـ}$ ،

$\overline{أد}$ ∩ $\overline{ب هـ}$ = {و} ، ق(∠جـ) = ٣٠° ،

أ ب = ٩ سم ، ب هـ = ١٢ سم

أوجد محيط △ ب د و



[٢٠ سم]

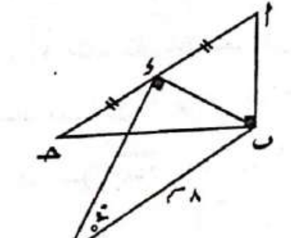
(١١) في الشكل المقابل :

أ ب جـ △ قائم الزاوية فى ب ،

د منتصف $\overline{أجـ}$ ، رسم $\overline{د هـ}$ ⊥ $\overline{ب د}$

بحيث ق(∠ب هـ د) = ٣٠°

فإذا كان ب هـ = ٨ سم فأوجد طول $\overline{أجـ}$



[٨ سم]



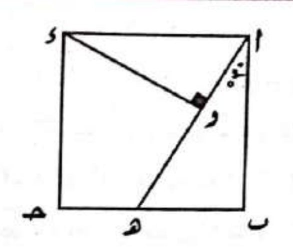
(١٢) في الشكل المقابل :

أ ب جـ د مربع ، هـ ∈ $\overline{ب جـ}$

بحيث ق(∠ب أ هـ) = ٣٠° ، و ∈ $\overline{أهـ}$

بحيث $\overline{د و}$ ⊥ $\overline{أهـ}$ فإذا كان أ و = ٥ سم

فأوجد : مساحة المربع



[١٠٠ سم²]

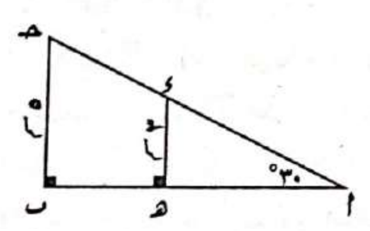
(١٣) في الشكل المقابل :

أ ب جـ △ قائم الزاوية فى ب ،

هـ ∈ $\overline{أ ب}$ ، د ∈ $\overline{أجـ}$ بحيث $\overline{د هـ}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ ،

ق(∠أ) = ٣٠° ، د هـ = ٣ سم ، ب جـ = ٥ سم

أوجد طول $\overline{د جـ}$



[٤ سم]

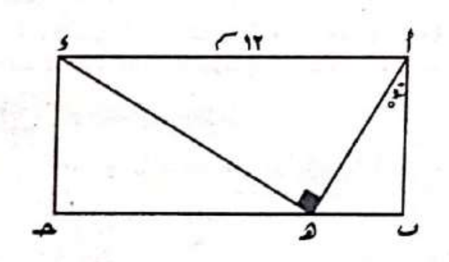
(١٤) في الشكل المقابل :

أ ب جـ د مستطيل ، هـ ∈ $\overline{ب جـ}$

بحيث ق(∠أ هـ د) = ٩٠° ، أ د = ١٢ سم

فإذا كان ق(∠ب أ هـ) = ٣٠°

فأوجد طول $\overline{ب هـ}$



[٣ سم]

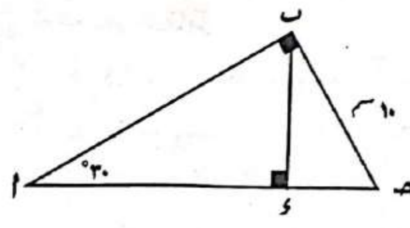
(١٥) في الشكل المقابل :

أ ب جـ △ قائم الزاوية فى ب ،

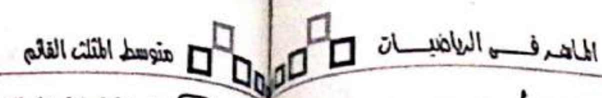
ق(∠أ) = ٣٠° ، د ∈ $\overline{أجـ}$

بحيث $\overline{ب د}$ ⊥ $\overline{أجـ}$ فإذا كان ب جـ = ١٠ سم

فأوجد طول $\overline{أ د}$

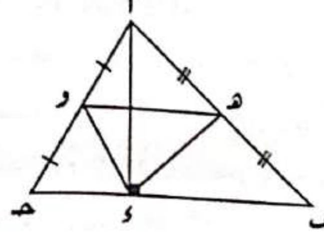
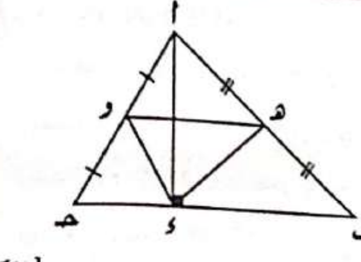


[١٥ سم]





(١٦) في الشكل المقابل :

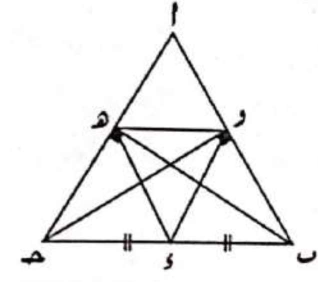



ا ب جـ Δ ، هـ ، و منتصفي $\overline{اب}$ ، $\overline{اجـ}$ على الترتيب ، $\overline{اء} \perp \overline{بجـ}$ يقطعه في ء ، اب = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، اجـ = ٨ سم

احسب محيط Δ ء هـ و

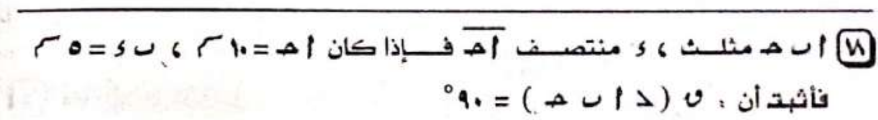
[١٥ سم]

(١٧) في الشكل المقابل :



ا ب جـ Δ ، و ∈ $\overline{اب}$ بحيث $\overline{جـو} \perp \overline{اب}$ ، ء منتصف $\overline{بجـ}$ ، هـ ∈ $\overline{اجـ}$ بحيث $\overline{بهـ} \perp \overline{اجـ}$

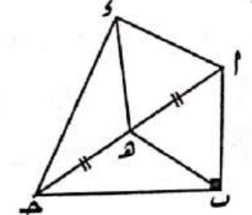
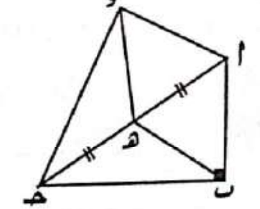
أثبت أن : Δ ء و هـ متساوي الساقين



(١٨) ا ب جـ مثلث ، ء منتصف $\overline{اجـ}$ فإذا كان اجـ = ١٠ سم ، ب ء = ٥ سم

فأثبت أن : ق(∠ ا ب جـ) = ٩٠°

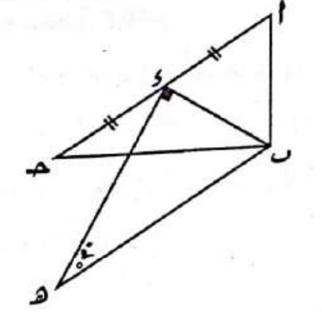
(١٩) في الشكل المقابل :

ا ب جـ Δ قائم الزاوية في ب ، هـ منتصف $\overline{اجـ}$ ، ب هـ = ٤ سم ، أخذت النقطة ء بحيث هـ ء = ٤ سم

أثبت أن : ق(∠ ا ء جـ) = ٩٠°

(٢٠) في الشكل المقابل :



ا ب جـ Δ ، ء منتصف $\overline{اجـ}$ ، $\overline{ءهـ} \perp \overline{بء}$ بحيث ق(∠ب هـ ء) = ٣٠° ، اجـ = ب هـ = ١٠ سم

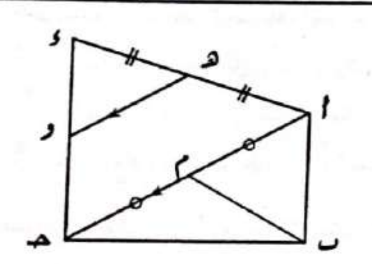
أثبت أن : Δ ا ب جـ قائم الزاوية في ب

(٢١) في الشكل المقابل :

ا ب جـ Δ قائم الزاوية في ا ، هـ منتصف $\overline{بجـ}$ ، اهـ = ٣ سم ، أخذت نقطة ء بحيث هـ ء = ٣ سم

أثبت أن : Δ ب ء جـ قائم الزاوية في ء

(٢٢) في الشكل المقابل :

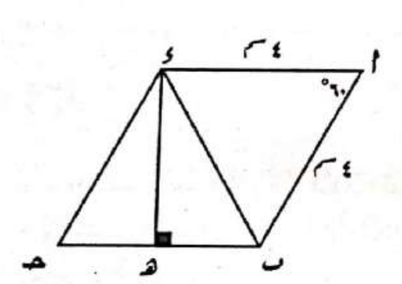


ا ب جـ ء شكل رباعي ، هـ ، م منتصفي $\overline{اء}$ ، $\overline{اجـ}$ على الترتيب ، و ∈ $\overline{ءجـ}$ ، $\overline{هـو} \parallel \overline{اجـ}$ ، ب م = هـ و

أثبت أن : ق(∠ ا ب جـ) = ٩٠°

مسائل المتفوقين

(٢٣) في الشكل المقابل :

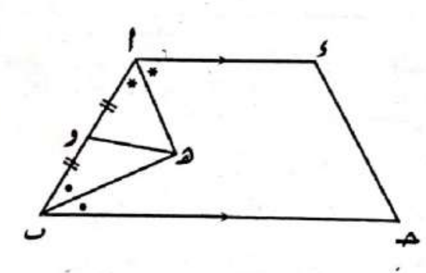


ا ب جـ ء معين طول ضلعه ٤ سم ، ق(∠ا) = ٦٠° ، هـ ∈ $\overline{بجـ}$ بحيث $\overline{ءهـ} \perp \overline{بجـ}$

أثبت أن : (١) $\overline{ءهـ}$ متوسط في Δ ء ب جـ

(٢) Δ ء ب جـ متساوي الأضلاع

(٢٤) في الشكل المقابل :



ا ب جـ ء شكل رباعي فيه $\overline{اء} \parallel \overline{بجـ}$ ، $\overrightarrow{اهـ}$ ينصف ∠ا ، $\overrightarrow{بهـ}$ ينصف ∠ب ، و منتصف $\overline{اب}$

أثبت أن : هـ و = $\frac{1}{2}$ اب



المثلث المتساوي الساقين

يصنف المثلث تبعاً لزواياه أو تبعاً لأضلاعه

- **يصنف المثلث حسب قياسات زواياه إلى ثلاث أنواع هي :**

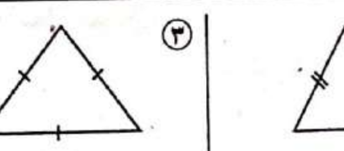
① مثلث حاد الزوايا و يكون فيه جميع زواياه حادة

② مثلث قائم الزاوية و يكون فيه إحدى زواياه قائمة

③ مثلث منفرج الزاوية و يكون فيه إحدى زواياه منفرجة

مع ملاحظة أن المثلث لا يمكن أن يحتوي على أكثر من زاوية واحدة قائمة أو منفرجة و أن المثلث يحدد نوعه حسب نوع أكبر زواياه

- **و يصنف المثلث حسب أطوال أضلاعه إلى ثلاث أنواع أيضاً و هي :**



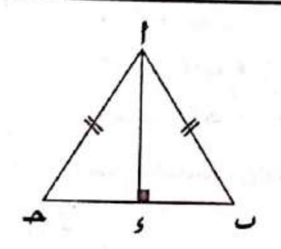
①	②	③
مثلث مختلف الأضلاع	**مثلث متساوي الساقين**	**مثلث متساوي الأضلاع**
و هو مثلث أطوال أضلاعه الثلاثة مختلفة	(أو متطابق الضلعين) وهو مثلث فيه ضلعان متساويان فى الطول	(أو متطابق الأضلاع) و هو مثلث فيه جميع أضلاعه متساوية فى الطول

فمثلاً : المثلث أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ ، يسمي الضلعان المتساويان $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ بساقي المثلث و يسمي الضلع الثالث $\overline{بجـ}$ قاعدة المثلث وتسمي ∠ ب ، ∠ جـ بزاويتي القاعدة (و هما بنفس الحرفين المسمي بهما القاعدة) و تسمى ∠ أ بزاوية رأس المثلث



نظرية المثلث المتساوى الساقين

زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوي الساقين متطابقتان



المعطيات : Δ أ ب جـ فيه $\overline{أب} \equiv \overline{أجـ}$

المطلوب : ∠ ب ≡ ∠ جـ

العمل : نرسم $\overline{أء} \perp \overline{بجـ}$

البرهان : ∵ Δ Δ أ ء ب ، أ ء جـ

فيهما:
- ق (∠ أ ء ب) = ق (∠ أ ء جـ) = ٩٠° عملاً
- $\overline{أب} \equiv \overline{أجـ}$ معطى
- $\overline{أء}$ ضلع مشترك

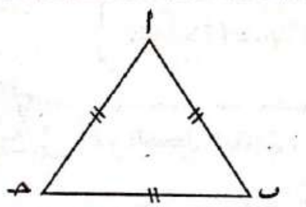
∴ Δ أ ء ب ≡ Δ أ ء جـ وينتج من التطابق أن ∠ ب ≡ ∠ جـ #

نتيجة

إذا كان المثلث متساوي الأضلاع فإن زواياه الثلاثة تكون متطابقة (متساوية فى القياس) و يكون قياس كل منها = ٦٠°

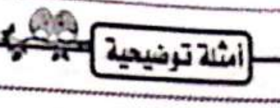
فمثلاً : إذا كان Δ أ ب جـ فيه أ ب = ب جـ = جـ أ

فإن ق (∠ أ) = ق (∠ ب) = ق (∠ جـ) = ٦٠°



تذكر أن

- قياس أي زاوية خارجة للمثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخلتين عدا المجاورة لها
- مكملات الزوايا المتساوية فى القياس تكون متساوية فى القياس أيضاً
- مجموع قياسات زوايا المثلث الداخله = ١٨٠°



أمثلة توضيحية



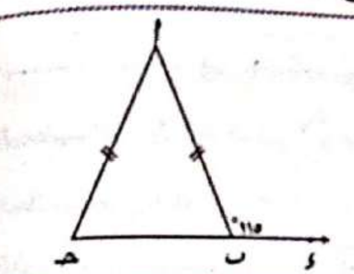
مثال [١] في الشكل المقابل :

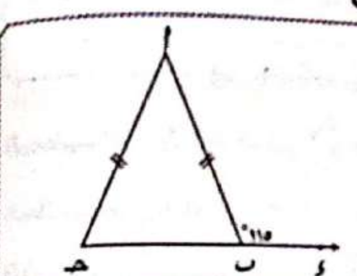
ء ∈ ←جـ ب ،

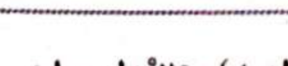
ق (∠ ا ب ء) = ١١٥° ،

ا ب = ا جـ

احسب قياسات زوايا △ ا ب جـ







الحل

المعطيات	ق (∠ ا ب ء) = ١١٥° ، ا ب = ا جـ
المطلوب	قياسات زوايا △ ا ب جـ
البرهان	∵ ء ∈ ←جـ ب
	∴ ق(∠ ا ب ء) + ق(∠ ا ب جـ) = ١٨٠°
	∵ ق(∠ ا ب ء) = ١١٥°
	∴ ق(∠ ا ب جـ) = ١٨٠° − ١١٥° = ٦٥°
	∵ ا ب = ا جـ
	∴ ق(∠ ا ب جـ) = ق(∠ جـ) = ٦٥°
	∵ مجموع قياسات زوايا △ = ١٨٠°
	∴ ق(∠ ا) = ١٨٠° − (٦٥° + ٦٥°) = ٥٠°

ملاحظة
ء ∈ ←جـ ب معناه يوجد زاوية مستقيمة قياسها = ١٨٠°
إذا علم قياسا زاويتين في △ نوجد قياس الزاوية الثالثة

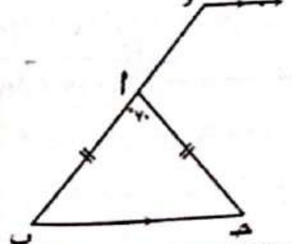
#

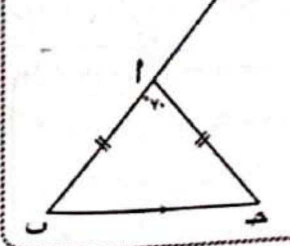
مثال [٢] في الشكل المقابل :

ا ب = ا جـ ، ↔ء هـ // ب جـ ،

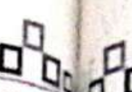
ا ∈ ب ء ، ق (∠ هـ ا ب) = ٧٠°

أوجد : ق (∠ ب ء هـ)





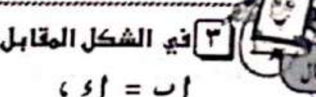
الحل

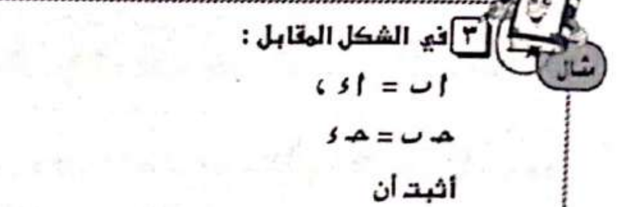




المعطيات	ا ب = ا جـ ، ↔ء هـ // ب جـ ، ق(∠ جـ ا ب) = ٧٠°
المطلوب	ق (∠ ب ء هـ)
البرهان	∵ ا ب = ا جـ
	∴ ق(∠ جـ) = ق(∠ ب)
	∵ ق(∠ جـ ا ب) = ٧٠°
	∴ ق(∠ جـ) + ق(∠ ب) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠°
	∴ ق(∠ جـ) = ق(∠ ب) = ١١٠°/٢ = ٥٥°
	∵ ↔ء هـ // ب جـ ، ↔ء ب قاطع لهما
	∴ ق(∠ ء) + ق(∠ ب) = ١٨٠° (داخلتان و في جهة واحدة من القاطع)
	∴ ق(∠ ء) = ١٨٠° − ٥٥° = ١٢٥°

#





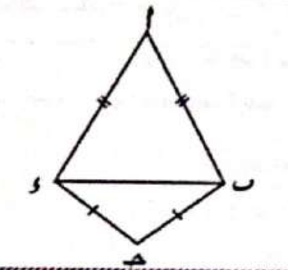
مثال [٣] في الشكل المقابل :

ا ب = ا ء ،

جـ ب = جـ ء

أثبت أن

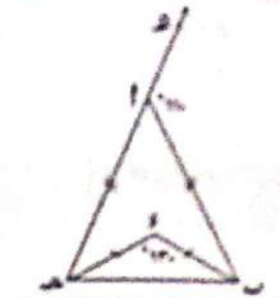
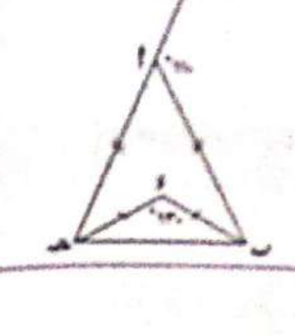
ق (∠ ا ب جـ) = ق (∠ ا ء جـ)



الحل

المعطيات	ا ب = ا ء ، جـ ب = جـ ء	
المطلوب	ق (∠ ا ب جـ) = ق (∠ ا ء جـ)	
البرهان	∵ △ ا ب ء فيه ا ب = ا ء	
	∴ ق(∠ ا ب ء) = ق(∠ ا ء ب)	(١)
	∵ △ جـ ب ء فيه جـ ب = جـ ء	
	∴ ق(∠ جـ ب ء) = ق(∠ جـ ء ب)	(٢)
	من (١) ، (٢) بالجمع :	
	∴ ق(∠ ا ب ء) + ق(∠ جـ ب ء) = ق(∠ ا ء ب) + ق(∠ جـ ء ب)	
	∴ ق(∠ ا ب جـ) = ق(∠ ا ء جـ)	

#

٤ في الشكل المقابل :

أ ب جـ △ فيه أ ب = أ جـ ،

هـ ∈ جـ أ→ ، ق(∠ب أ هـ) = ١١٠° ،

ء نقطة داخل △ أ ب جـ

بحيث ء ب = ء جـ ، ق(∠ء) = ١٣٠°

أوجد : ق(∠أ ب ء)

الحل

المعطيات : أ ب = أ جـ ، ق(∠ب أ هـ) = ١١٠° ، ق(∠ء) = ١٣٠° ، ء ب = ء جـ

المطلوب : ق(∠أ ب ء)

البرهان :

∵ هـ ∈ جـ أ→ ، ق(∠ب أ هـ) = ١١٠°

∴ ق(∠جـ أ ب) = ١٨٠° − ١١٠° = ٧٠° (الزاويتان متجاورتان متكاملتان)

∵ أ ب = أ جـ

∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ جـ ب) = $\frac{١٨٠° - ٧٠°}{٢}$ = $\frac{١١٠°}{٢}$ = ٥٥°

∵ ء ب = ء جـ ، ق(∠ء) = ١٣٠°

∴ ق(∠ء ب جـ) = ق(∠ء جـ ب) = $\frac{١٨٠° - ١٣٠°}{٢}$ = $\frac{٥٠°}{٢}$ = ٢٥°

∴ ق(∠أ ب ء) = ق(∠أ ب جـ) − ق(∠ء ب جـ)

= ٥٥° − ٢٥° = ٣٠°

#

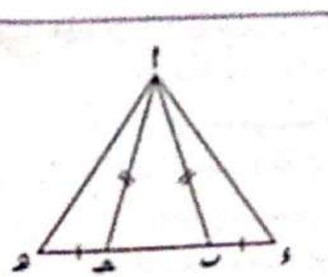
٥ في الشكل المقابل :

أ ب جـ △ فيه أ ب = أ جـ ،

ء ∈ جـ ب→ ، هـ ∈ ب جـ→

بحيث ب ء = جـ هـ

اثبت أن : أ ء = أ هـ



الحل

المعطيات : أ ب = أ جـ ، ب ء = جـ هـ

المطلوب : أ ء = أ هـ

البرهان :

∵ أ ب = أ جـ ∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ جـ ب)

∵ ∠أ ب ء تكمل ∠أ ب جـ ، ∠أ جـ هـ تكمل ∠أ جـ ب

∴ ق(∠أ ب ء) = ق(∠أ جـ هـ) مكملات زوايا متساوية

∵ △△ أ ب ء ، أ جـ هـ

فيهما:
- أ ب = أ جـ (معطى)
- ب ء = جـ هـ (معطى)
- ق(∠أ ب ء) = ق(∠أ جـ هـ) (برهاناً)

∴ △ أ ب ء ≡ △ أ جـ هـ وينتج أن أ ء = أ هـ #



تدريب (١)

في الشكل المقابل :

أ ب = أ جـ ، أ ء // جـ ب ،

ق(∠ب أ ء) = ٥٥°

أكمل ما يأتي لإيجاد ق(∠ب أ جـ)

المعطيات : ....

المطلوب : ....

البرهان :

∵ أ ء // جـ ب ، أ ب قاطع لهما

∴ ق(∠......) = ق(∠......) = ...° بالـ ....

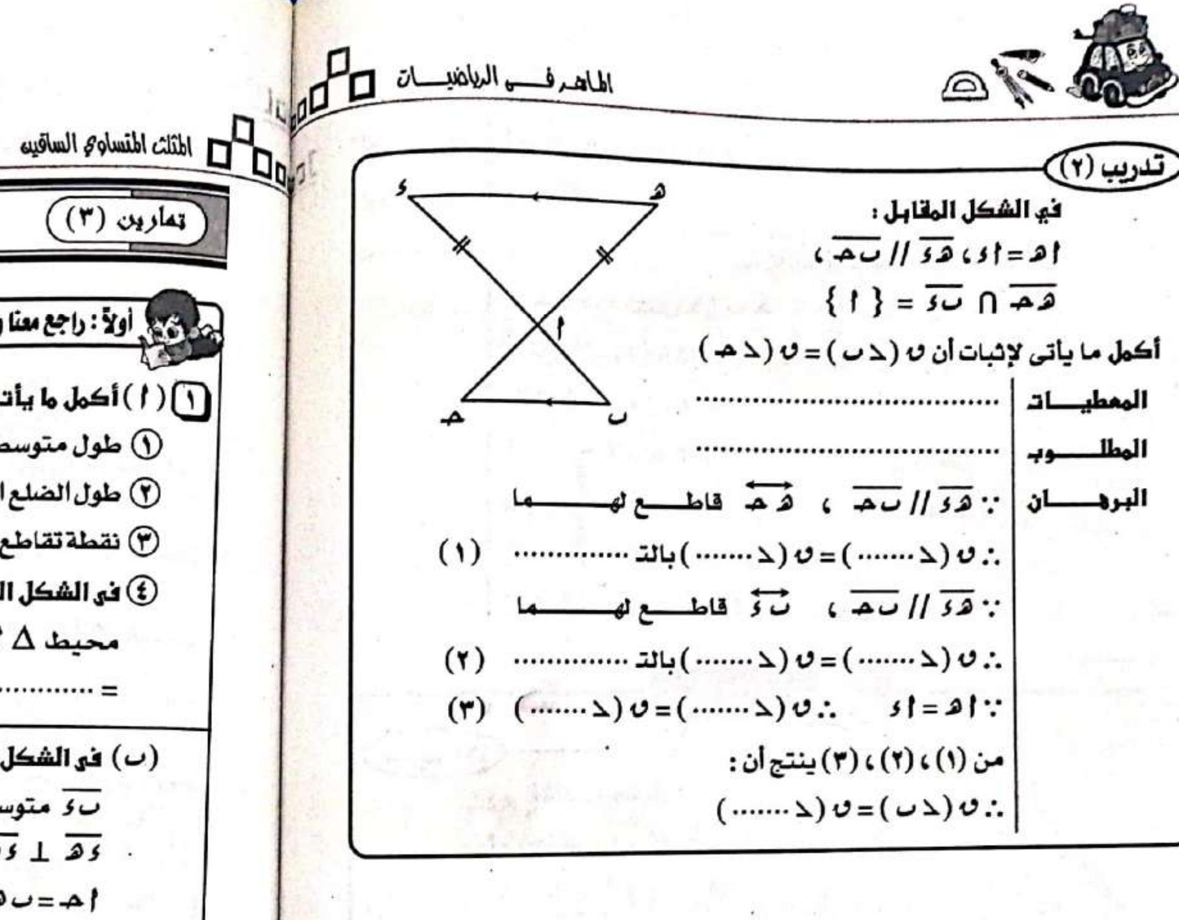
∵ أ ب = أ جـ ∴ ق(∠......) = ق(∠......) = ...°

∵ مجموع قياسات زوايا △ أ ب جـ = ١٨٠°

∴ ق(∠ب أ جـ) + ق(∠......) + ق(∠......) = ١٨٠°

∴ ق(∠ب أ جـ) + ...° + ...° = ١٨٠°

∴ ق(∠ب أ جـ) = ١٨٠° − (......° + ...°) = ...°



تدريب (٢)

في الشكل المقابل :

اهـ = اء ، هـء // بجـ ،

هـجـ ∩ بء = { ا }

أكمل ما يأتى لإثبات أن ق (∠ب) = ق (∠جـ)

المعطيات ....

المطلوب ....

البرهان ∵ هـء // بجـ ، هـجـ قاطع لهما

∴ ق (∠.......) = ق (∠.......) بالت................ (١)

∵ هـء // بجـ ، بء قاطع لهما

∴ ق (∠.......) = ق (∠.......) بالت................ (٢)

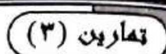
∵ اهـ = اء ∴ ق (∠.......) = ق (∠.......) (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن :

∴ ق (∠ب) = ق (∠.......)

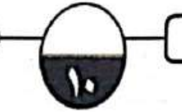


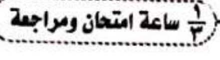




تمارين (٣) على المثلث المتساوى الساقين

أولاً : راجع معنا واختبر نفسك

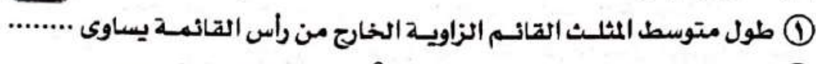




$\frac{1}{3}$ ساعة امتحان ومراجعة

اختبار تراكمي (٢)

١ (أ) أكمل ما يأتى :



① طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى ....

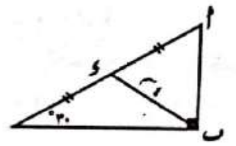
② طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى ....

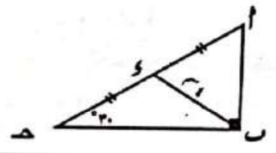
③ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة .... من جهة الرأس

④ **فى الشكل المقابل :**

محيط △ ابء

= .... سم





٤ درجات

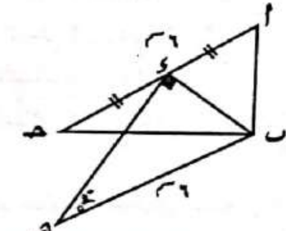
(ب) فى الشكل المقابل :

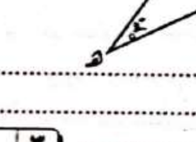
بء متوسط فى △ ابجـ ،

ءهـ ⊥ بء ، ق (∠هـ) = ٣٠° ،

اجـ = بهـ = ٦ سم ، **احسب طول بء**

ثم اثبت أن : ق (∠ابجـ) = ٩٠°





....

....

....

٣ درجات

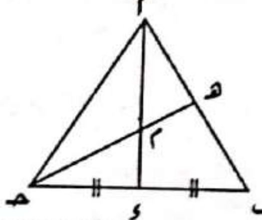
(جـ) فى الشكل المقابل :

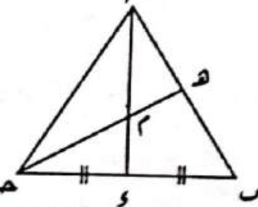
ابجـ △ فيه ء منتصف بجـ ،

اب = اجـ ، م ∈ اء بحيث

ام = $\frac{2}{3}$ اء ، جـم ∩ اب = { هـ }

اثبت أن بهـ = $\frac{1}{2}$ اجـ





....

....

....



٣ درجات




ثانياً : أجب عما يأتي :

مسائل المستوى الأول

[٢] أكمل ما يأتي :

① زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين ....

② إذا كان المثلث متساوي الأضلاع فإن زواياه الثلاثة ....

③ في المثلث المتساوي الساقين إذا كان قياس إحدى زاويتي القاعدة ٤٥° كان المثلث ....

④ في △ أ ب جـ إذا كان أ ب = أ جـ ، ق(∠أ) = ٨٠° فإن ق(∠ب) = ق(∠.....) = ...°

⑤ إذا كان أ ب جـ مثلثاً قائم الزاوية في أ ، أ ب = أ جـ فإن ق(∠ب) = ...

[٣] اختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس :

① المثلث المتساوي الساقين الذي قياس زاوية رأسه ٥٠° يكون قياس إحدى زاويتي قاعدته = ... [٥٠° أ، ٤٠° أ، ٦٥° أ، ٩٠°]

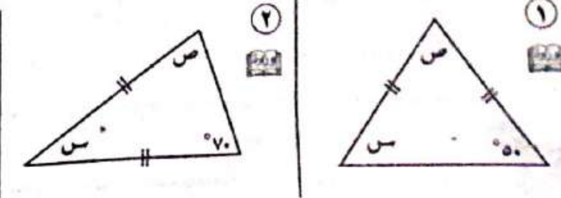
② قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوي الأضلاع = ... [٣٠° أ، ٩٠° أ، ١٢٠° أ، ٦٠°]

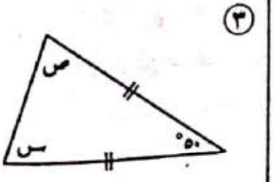
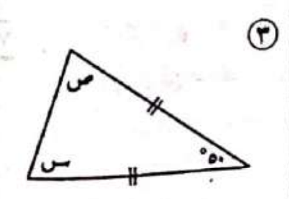
③ في المثلث المتساوي الساقين إذا كان قياس إحدى زاويتي القاعدة ٦٥° فإن قياس زاوية رأسه = ... [٦٥° أ، ٧٠° أ، ٦٠° أ، ٥٠°]

④ مجموع قياسي زاويتي القاعدة في المثلث المتساوي الأضلاع = ... [٦٠° أ، ١٢٠° أ، ١٨٠° أ، ٤٠°]

⑤ في △ س ص ع المتساوي الساقين إذا كان $\overline{\text{س ص}}$ ⊥ $\overline{\text{س ع}}$ فإن ق(∠ص) = ... [٣٠° أ، ٦٠° أ، ٤٥° أ، ٩٠°]

[٤] في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة س ، ص :





④ جـ ∈ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$

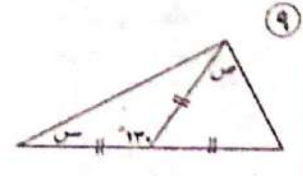
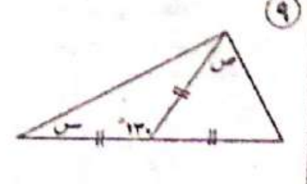
⑤ ء ∈ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$

⑥ ب ∈ $\overline{\text{ء جـ}}$

⑦

⑧

⑨

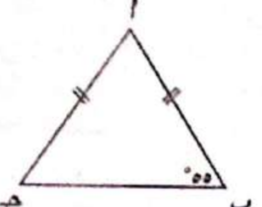
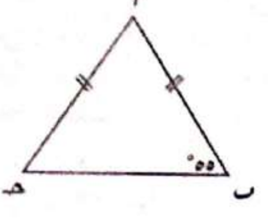
[٥] في الشكل المقابل :

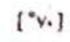
أ ب جـ △ فيه

أ ب = أ جـ

ق(∠ب) = ٥٥°

أوجد ، ق(∠أ)


[٧٠°]

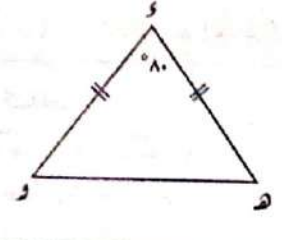
[٦] في الشكل المقابل :

ء هـ و △ فيه

ء هـ = ء و ،

ق(∠ء) = ٨٠°

أوجد : ق(∠هـ)



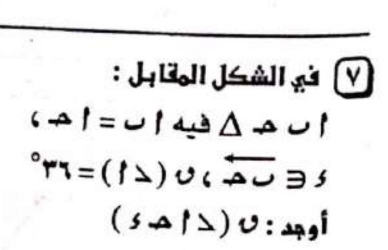
[٥٠°]

[٧] في الشكل المقابل :

أ ب جـ △ فيه أ ب = أ جـ ،

ء ∈ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، ق(∠أ) = ٣٦°

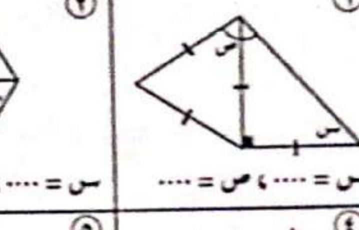
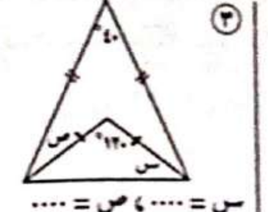
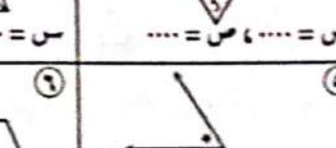
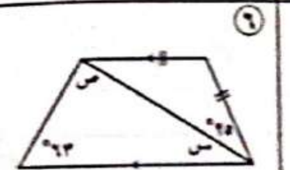
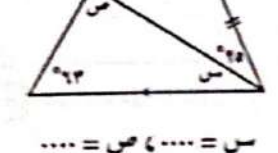
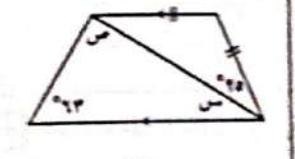
أوجد : ق(∠أ جـ ء)



[١٠٨°]



⑧ أكمل ما يأتي باستخدام معطيات كل شكل :

س = ... ، ص = ...

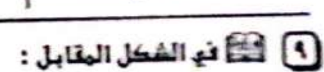
س = ... ، ص = ...

س = ... ، ص = ...

س = ... ، ص = ...

س = ... ، ص = ...

س = ... ، ص = ...

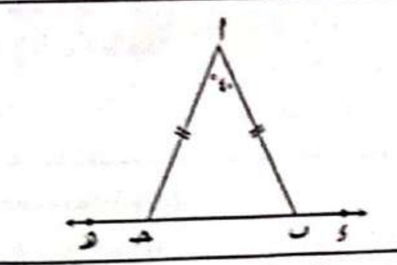

⑨ في الشكل المقابل :

ا ب حـ مثلث فيه

ا ب = ا حـ ، ق (∠ ا) = ٤٠° ،

ء ∈ حـ ب ، هـ ∈ ب حـ

اثبت أن: ق (∠ ا ب ء) = ق (∠ ا حـ هـ)

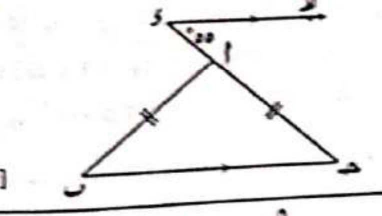


⑩ في الشكل المقابل :

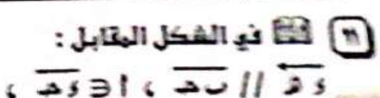
ء هـ // ب حـ ، ا ∈ ء حـ ،

ق (∠ ء) = ٥٥° ، ا حـ = ا ب

أوجد : ق (∠ ب ا حـ)



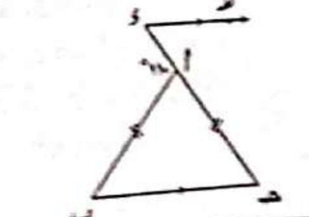
[٧٠°]


⑪ في الشكل المقابل :

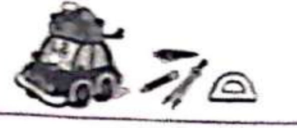
ء هـ // ب حـ ، ا ∈ ء حـ ،

ا حـ = ا ب ، ق (∠ ء ا ب) = ١١٠°

أوجد : ق (∠ ء)



[٥٥°]



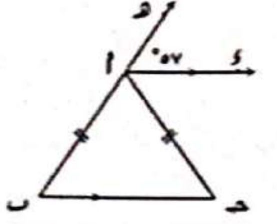
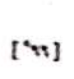
⑫ في الشكل المقابل :

ا ء // ب حـ ، هـ ∈ ب ا ،

ا حـ = ا ب ، ق (∠ ء ا هـ) = ٥٧°

① أوجد : ق (∠ ب ا حـ)

② اثبت أن: ا ء ينصف ∠ حـ ا هـ

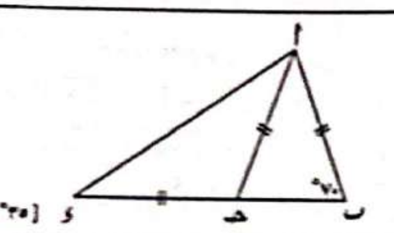
[٦٦°]

⑬ في الشكل المقابل :

ا ب = ا حـ = ء حـ ،

ق (∠ ب) = ٧٠° ، حـ ∈ ب ء

أوجد: ق (∠ ء) ، ق (∠ ب ا ء)



[٣٥° ، ٧٥°]

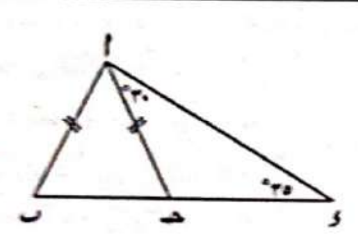
⑭ في الشكل المقابل :

ق (∠ ء) = ٣٥° ،

ق (∠ حـ ا ء) = ٣٠° ،

ا حـ = ا ب ، حـ ∈ ب ء

أوجد: ق (∠ ب ا حـ)



[٨٠°]

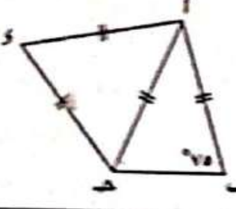
⑮ في الشكل المقابل :

ا ء = ء حـ = حـ ا = ا ب ،

ق (∠ ب) = ٧٥°

① أوجد : ق (∠ ب ا حـ) ، ق (∠ ء حـ ب)

② اثبت أن: ا ب ⊥ ا ء



[٣٠° ، ١٣٥°]

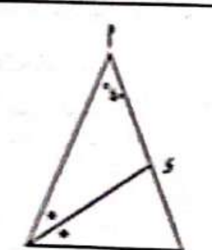
⑯ في الشكل المقابل :

حـ ء ينصف (∠ ب حـ ا)

حيث حـ ء ∩ ا ب = {ء}

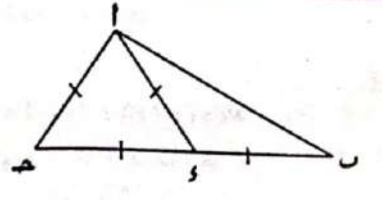
ق (∠ ا) = ٤٠° ، ا ب = ا حـ

أوجد : ق (∠ ب) ، ق (∠ ب حـ ء)



[٧٠° ، ٣٥°]

(١٧) في الشكل المقابل :



أ ب جـ $\triangle$ فيه

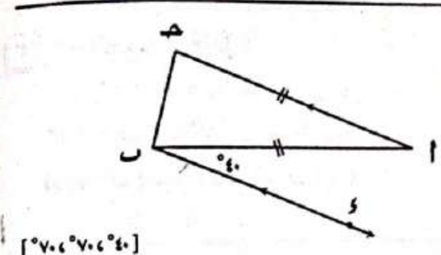
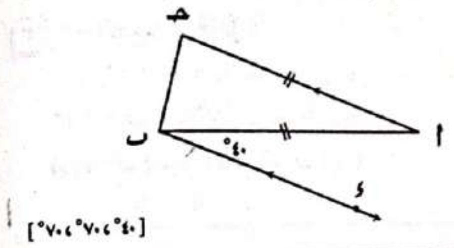
د منتصف $\overline{ب جـ}$ ،

أ جـ = أ د = جـ د

أثبت أن : ق (∠ب أ جـ) = ٩٠°

---

(١٨) في الشكل المقابل :

$\overline{أ جـ}$ // $\overrightarrow{ب د}$ ، أ ب = أ جـ ،

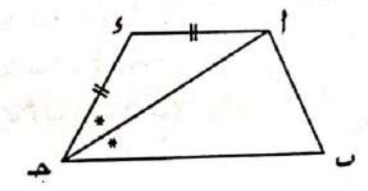
ق (∠أ ب د) = ٤٠°

أوجد : قياسات زوايا $\triangle$ أ ب جـ

[٤٠°، ٧٠°، ٧٠°]

---

(١٩) في الشكل المقابل :



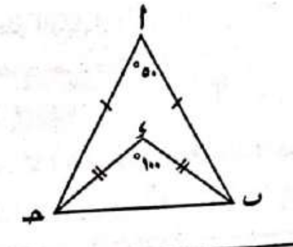
أ ب جـ د شكل رباعي فيه

أ د = جـ د ، $\overrightarrow{جـ أ}$ ينصف ∠ب جـ د

أثبت أن : $\overline{أ د}$ // $\overline{ب جـ}$

---

(٢٠) في الشكل المقابل :





أ ب = أ جـ ، د ب = د جـ ،

ق (∠أ) = ٥٠° ، ق (∠د) = ١٠٠°

أوجد : ① ق (∠أ ب جـ)

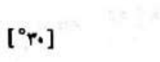
② ق (∠أ ب د)

[٦٥°]

[٢٥°]

---

(٢١) في الشكل المقابل :



أ د = جـ د ، أ ب = جـ ب ،

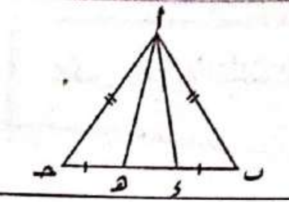
ق (∠د أ ب) = ١٢٠° ،

ق (∠د) = ٩٠°

أوجد : ق (∠ب)

[٣٠°]

(٢٢) في الشكل المقابل :



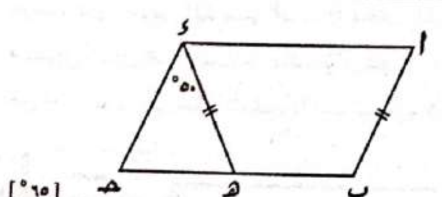
أ ب جـ $\triangle$ فيه أ ب = أ جـ ،

د ، هـ ∈ $\overline{ب جـ}$ بحيث ب د = هـ جـ ،

أثبت أن : $\triangle$ أ د هـ متساوي الساقين

---

(٢٣) في الشكل المقابل :



أ ب جـ د متوازي أضلاع

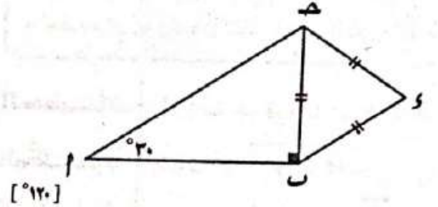
أ ب = د هـ ، ق (∠هـ د جـ) = ٥٠°

أوجد ق (∠أ)

[٦٥°]

---

(٢٤) في الشكل المقابل :



أ ب جـ $\triangle$ قائم الزاوية في ب ،

ق (∠أ) = ٣٠° ، ب جـ = جـ د = د ب

① أوجد ق (∠د جـ أ)

② أثبت أن $\overline{د ب}$ // $\overline{جـ أ}$

[١٢٠°]

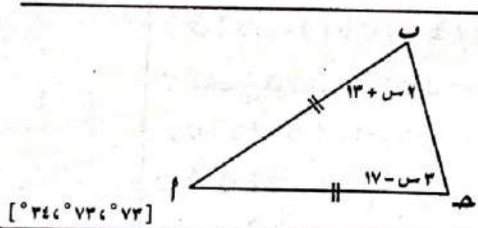
---

(٢٥) أ ب جـ $\triangle$ فيه ق (∠أ) = ٥٠° ، أ ب = أ جـ ، رسم $\overrightarrow{ب د}$ ينصف ∠ب ، ورسم $\overrightarrow{جـ د}$ ينصف ∠جـ بحيث $\overrightarrow{ب د} \cap \overrightarrow{جـ د}$ = { د } أوجد : ق (∠ب د جـ)

[١١٥°]

---

(٢٦) في الشكل المقابل :



أ ب = أ جـ ، ق (∠ب) = ٢س + ١٣°

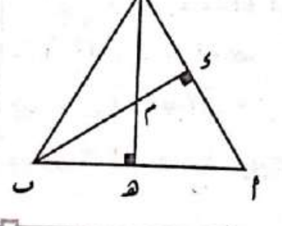
ق (∠جـ) = ٣ س − ١٧°

أوجد : قياسات زوايا $\triangle$ أ ب جـ

[٣٤°، ٧٣°، ٧٣°]

مسائل المتفوقين

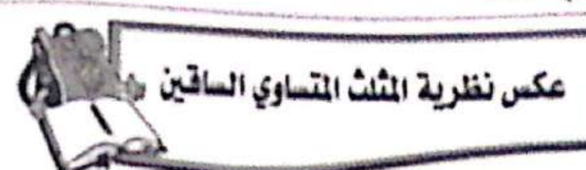
(٢٧) في الشكل المقابل :



أ ب = أ جـ ، $\overline{ب د} \perp \overline{أ جـ}$ ،

$\overline{جـ هـ} \perp \overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ هـ} \cap \overline{د ب}$ = { م }

أثبت أن : ب د = جـ هـ



عكس نظرية المثلث المتساوي الساقين

درسنا في الدرس السابق أنه إذا كان المثلث متساوي الساقين كانت زاويتا القاعدة متساويتين في القياس والسؤال هو إذا حدث العكس وكانت الزاويتان متساويتان في القياس في مثلث فماذا نستنتج و هذا ما سنعرفه من خلال النظرية الآتية

نظرية

إذا تطابقت زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين يكونان متطابقان و يكون المثلث متساوي الساقين

المعطيات: △ أ ب جـ فيه ∠ ب ≡ ∠ جـ

المطلوب: إثبات أن أجـ ≡ أب

العمل: ننصف ∠ أ بالمنصف أء يقطع ب جـ في ء

البرهان: ∵ ∠ ب ≡ ∠ جـ

∴ ق(∠ ب) = ق(∠ جـ)

∵ ق(∠ ب أ ء) = ق(∠ جـ أ ء)،

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ ق(∠ أ ء ب) = ق(∠ أ ء جـ)

∵ △△ أ ء ب ، أ ء جـ

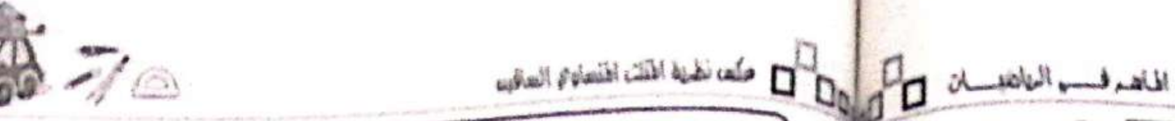
فيهما:
- أء ضلع مشترك
- ق(∠ أ ء ب) = ق(∠ أ ء جـ)
- ق(∠ ب أ ء) = ق(∠ جـ أ ء)

∴ △ أ ء ب ≡ △ أ ء جـ

وينتج أن أب ≡ أجـ

ويكون △ أ ب جـ متساوي الساقين

#



نتيجة

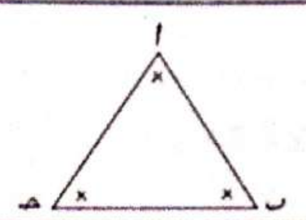
إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون متساوي الأضلاع

فمثلاً: إذا كان △ أ ب جـ فيه

∠ أ ≡ ∠ ب ≡ ∠ جـ

فإن أ ب = ب جـ = جـ أ

ويكون المثلث متساوي الأضلاع



نتيجة

المثلث المتساوي الساقين الذي قياس إحدى زواياه ٦٠° يكون متساوي الأضلاع

فمثلاً:

إذا كان أ ب = أ جـ ،
ق(∠ ب) = ٦٠°
فإن:
ق(∠ جـ) = ٦٠°
ق(∠ أ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٦٠°) = ٦٠°
ق(∠ أ) = ق(∠ ب) = ق(∠ جـ) = ٦٠°
∴ △ أ ب جـ متساوي الأضلاع

إذا كان أ ب = أ جـ ،
ق(∠ أ) = ٦٠°
فإن:
ق(∠ ب) = ق(∠ جـ) = (١٨٠° − ٦٠°) ÷ ٢ = ٦٠°
ق(∠ أ) = ق(∠ ب) = ق(∠ جـ) = ٦٠°
∴ △ أ ب جـ متساوي الأضلاع



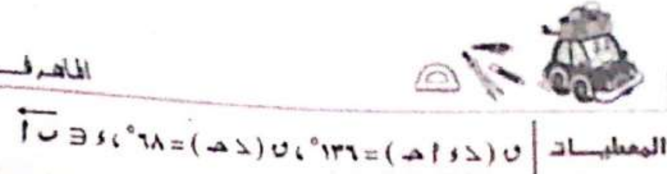
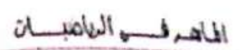
أمثلة توضيحية

مثال ١ في الشكل المقابل:

ء ∈ ب أ ،
ق(∠ ء أ جـ) = ١٣٦° ،
ق(∠ جـ) = ٦٨°

أثبت أن: △ أ ب جـ متساوي الساقين

الحل

المعطيات: ق(∠ د أ جـ) = ١٣٦°، ق(∠ جـ) = ٦٨°، د ∈ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$

المطلوب: △ أ ب جـ متساوي الساقين

البرهان: ∵ د ∈ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$

∴ ق(∠ جـ أ ب) = ١٨٠° − ١٣٦° = ٤٤° (مكملة زاوية جـ أ د)

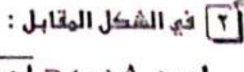
∵ مجموع قياسات زوايا △ = ١٨٠°

∴ ق(∠ ب) = ١٨٠° − (٦٨° + ٤٤°) = ٦٨°

∴ ق(∠ ب) = ق(∠ جـ)

∴ △ أ ب جـ متساوي الساقين

#

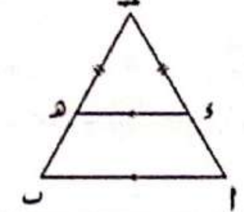
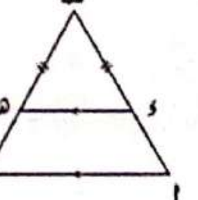


[٢] في الشكل المقابل :

أ ب جـ △ فيه د ∈ $\overline{\text{أجـ}}$ ، هـ ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$

بحيث جـ د = جـ هـ ، $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$

أثبت أن : $\overline{\text{جـ أ}} \equiv \overline{\text{جـ ب}}$

الحل

المعطيات: جـ د = جـ هـ ، $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$

المطلوب: $\overline{\text{جـ أ}} \equiv \overline{\text{جـ ب}}$

البرهان: ∵ جـ د = جـ هـ

∴ ق(∠ جـ هـ د) = ق(∠ جـ د هـ) (١)

∵ $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ قاطعين لهما

∴ ق(∠ جـ د هـ) = ق(∠ أ) بالتناظر (٢)

∴ ق(∠ جـ هـ د) = ق(∠ ب) بالتناظر (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن : ق(∠ أ) = ق(∠ ب)

∴ جـ أ = جـ ب ∴ $\overline{\text{جـ أ}} \equiv \overline{\text{جـ ب}}$

#



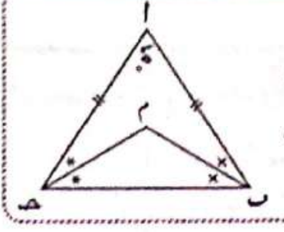



[٣] في الشكل المقابل :

أ ب جـ △ فيه أ ب = أ جـ ، ق(∠ أ) = ٥٦° ،

$\overrightarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ أ ب جـ ، $\overrightarrow{\text{جـ م}}$ ينصف ∠ أ جـ ب

أثبت أن : م ب = م جـ ، أوجد : ق(∠ م)



الحل

المعطيات: أ ب = أ جـ ، ق(∠ أ) = ٥٦° ، $\overrightarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ أ ب جـ ، $\overrightarrow{\text{جـ م}}$ ينصف ∠ أ جـ ب

المطلوب: م ب = م جـ ، ق(∠ م)

البرهان: في △ أ ب جـ ∵ أ ب = أ جـ

∴ ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ أ جـ ب)

∵ ق(∠ أ) = ٥٦°

∴ ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ أ جـ ب) = $\frac{١٨٠° - ٥٦°}{٢}$ = $\frac{١٢٤°}{٢}$ = ٦٢°

∵ $\overrightarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ أ ب جـ

∴ ق(∠ م ب جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ أ ب جـ) = $\frac{٦٢°}{٢}$ = ٣١°

∵ $\overrightarrow{\text{جـ م}}$ ينصف ∠ أ جـ ب

∴ ق(∠ م جـ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ أ جـ ب) = $\frac{٦٢°}{٢}$ = ٣١°

∴ ق(∠ م ب جـ) = ق(∠ م جـ ب)

∴ م ب = م جـ

∴ ق(∠ م) = ١٨٠° − (٣١° + ٣١°) = ١١٨°

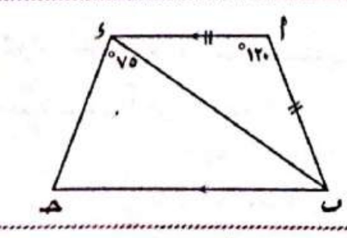
#

[٤] في الشكل المقابل :

أ ب = أ د ، ق(∠ أ) = ١٢٠° ،

$\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق(∠ ب د جـ) = ٧٥°

أثبت أن : ب د = ب جـ



الحل



المعطيات	أ ب = أ د ، ق(∠أ) = ١٢٠° ، أ د // ب ج ، ق(∠ب د ج) = ٧٥°
المطلوب	ب د = ب ج
البرهان	∵ △ أ ب د فيه أ ب = أ د ، ق(∠أ) = ١٢٠°

∴ ق(∠أ ب د) = ق(∠أ د ب) = $\frac{١٨٠° - ١٢٠°}{٢} = \frac{٦٠°}{٢} = ٣٠°$

∵ أ د // ب ج ، ب د قاطع لهما

∴ ق(∠أ د ب) = ق(∠ج ب د) = ٣٠° بالتبادل

∵ مجموع قياسات زوايا △ د ب ج = ١٨٠°

∴ ق(∠ج) + ق(∠ب د ج) + ق(∠د ب ج) = ١٨٠°

∴ ق(∠ج) + ٧٥° + ٣٠° = ١٨٠°

∴ ق(∠ج) = ١٨٠° − (٧٥° + ٣٠°) = ٧٥°

∵ △ د ب ج فيه ق(∠ج) = ق(∠ب د ج) = ٧٥°

∴ ب د = ب ج

#

مثال ٥ في الشكل المقابل :

أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ، ق(∠ج) = ٣٠° ، د ∈ أ ج بحيث د ب = د ج

أثبت أن : (١) △ أ ب د متساوي الأضلاع

(٢) أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ ج

الحل

المعطيات	ق(∠ب) = ٩٠° ، ق(∠ج) = ٣٠° ، د ب = د ج
المطلوب	△ أ د ب متساوي الأضلاع ، أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ ج
البرهان	في △ د ب ج ∵ د ب = د ج

∴ ق(∠د ب ج) = ق(∠ج) = ٣٠°

∵ ق(∠أ ب ج) = ٩٠° ، ق(∠د ب ج) = ٣٠°

∴ ق(∠أ ب د) = ٩٠° − ٣٠° = ٦٠°



∵ ∠أ د ب خارجة عن △ د ب ج

∴ ق(∠أ د ب) = ٣٠° + ٣٠° = ٦٠°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٦٠°) = ٦٠°

∴ ق(∠أ) = ق(∠أ ب د) = ق(∠أ د ب) = ٦٠°

∴ أ ب = ب د = د أ

∴ △ أ ب د متساوي الأضلاع

∵ ب د = أ د ، ب د = د ج ∴ أ د = د ج

∴ أ د = $\frac{١}{٢}$ أ ج ∵ أ ب = أ د

∴ أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ ج

#

أمثلة للتدريب

تدريب (١)

في الشكل المقابل :

△ أ ب ج فيه أ ب = أ ج ، د هـ // ب ج

أكمل ما يأتي لإثبات أن △ أ د هـ متساوي الساقين

المعطيات	....
المطلوب	....
البرهان	∵ △ أ ب ج فيه أ ب = أ ج

∴ ق(∠........) = ق(∠........) (١)

∵ د هـ // ب ج ، أ ب ، أ ج قاطعين لهما

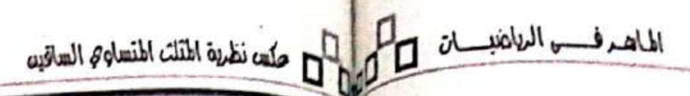
∴ ق(∠أ د هـ) = ق(∠...) بالت........ (٢)

ق(∠........) = ق(∠ج) بالت........ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن :

ق(∠........) = ق(∠........)

∴ .... = ... ∴ △ أ د هـ ....



تدريب (٢)

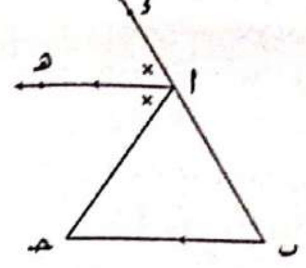
في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث ، ء ∈ $\overrightarrow{ب أ}$

بحيث ق (∠ جـ أ ء) = ١١٠° ،

$\overrightarrow{أ هـ}$ ينصف (∠ جـ أ ء) ،

$\overrightarrow{أ هـ}$ // $\overline{ب جـ}$



أكمل ما يأتي لإثبات أن أ ب = أ جـ

المعطيات ....

المطلوب ....

البرهان ∵ ق (∠ جـ أ ء) = ١١٠° ، $\overrightarrow{أ هـ}$ ينصف ∠ جـ أ ء

∴ ق (∠ ....) = ق (∠ ....) = $\frac{١١٠°}{٢}$ = ...°

∵ $\overrightarrow{أ هـ}$ // $\overline{ب جـ}$ ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ قاطع لهما

∴ ق (∠ ء أ هـ) = ق (∠ ....) = ...° (١)

∵ $\overrightarrow{أ هـ}$ // $\overline{ب جـ}$ ، $\overleftrightarrow{أ جـ}$ قاطع لهما

∴ ق (∠ هـ أ جـ) = ق (∠ ....) = ...° (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

ق (∠ ....) = ق (∠ ....) ∴ أ ب = ...

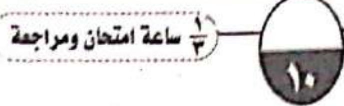


تمارين (٤) على عكس نظرية المثلث المتساوي الساقين

أسئلة الوزارة

أولاً : راجع معنا واختبر نفسك

١٠



اختبار تراكمي (٣)

١ (أ) أكمل ما يأتي :

① طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوي ....

② قياس كل زاوية في المثلث المتساوي الأضلاع تساوي ....

③ إذا كان أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ ، أ ب = أ جـ فإن ق (∠ ب) = ...

④ في المثلث المتساوي الساقين إذا كان قياس زاوية الرأس ٤٠° فإن قياس إحدى زاويتي القاعدة = ...

٤ درجات

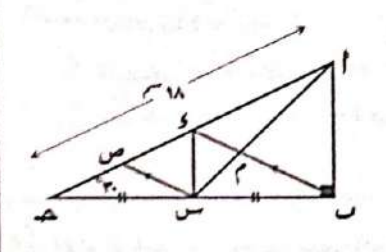
(ب) في الشكل المقابل :

إذا كان △ أ ب جـ فيه ق (∠ ب) = ٩٠° ، ء منتصف $\overline{أ جـ}$ ،

س منتصف $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{س ص}$ // $\overline{ب ء}$ ،

ق (∠ جـ) = ٣٠° ، أ جـ = ١٨ سم ،

أ س = ١٢ سم ، $\overline{أ س}$ ∩ $\overline{ب ء}$ = {م}



فأكمل ما يأتي :

ب ء = ... سم ، ب م = ... سم

س ص = ... سم ، ء س = ... سم

ق (∠ ء س ص) = ...° ، محيط الشكل س ص ء م = ... سم

٣ درجات

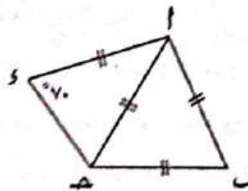
(جـ) في الشكل المقابل :

أ ب = ب جـ = جـ أ = أ ء ،

ق (∠ ء) = ٧٠°

أوجد : ① ق (∠ ب جـ ء)

② ق (∠ ب أ ء)



....

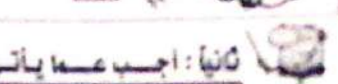
....

....

....

٣ درجات





ثانياً : أجب عما يأتي :

مسائل المستوى الأول

(٢) أكمل ما يأتي :

① إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون ......

② إذا كان قياس زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين تساوي ٦٠° فإن المثلث ......

③ في Δ أ ب جـ إذا كان ق (∠ أ) = ٦٥° ، ق (∠ ب) = ٥٠° فإن أ ب = ...

④ إذا كان قياس إحدى زاويتي القاعدة في Δ متساوي الساقين ٥٢° فإن قياس زاوية رأسه = ...°

⑤ إذا كان قياس زاوية رأس مثلث متساوي الساقين = ٧٠° فإن قياس إحدى زاويتي القاعدة = ...°

⑥ إذا كان أ ب جـ مثلثاً فيه ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ ب) = ٨٠° كان المثلث ......

⑦ أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ ، ق (∠ أ) = ٦٠° فإذا كان محيطه = ١٢ سم فإن ب جـ = ... سم

(٣) اختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس :

① إذا كان قياس إحدى زاويتي القاعدة في المثلث المتساوي الساقين = ٣٠° كان المثلث ......

[منفرج الزاوية ، حاد الزوايا ، قائم الزاوية ، متساوي الأضلاع]

② إذا كان قياس زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين ١٠٠° فإن قياس إحدى زاويتي القاعدة يساوي ...... [١٠٠° ، ٥٠° ، ٤٠° ، ١٥٠°]

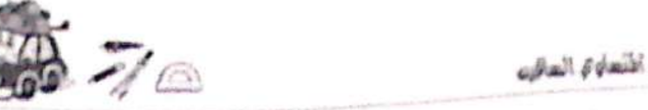
③ إذا كان قياسا زاويتين من مثلث ٧٠° ، ٤٠° كان المثلث ......

[متساوي الأضلاع ، متساوي الساقين ، مختلف الأضلاع ، قائم ومتساوي الساقين]

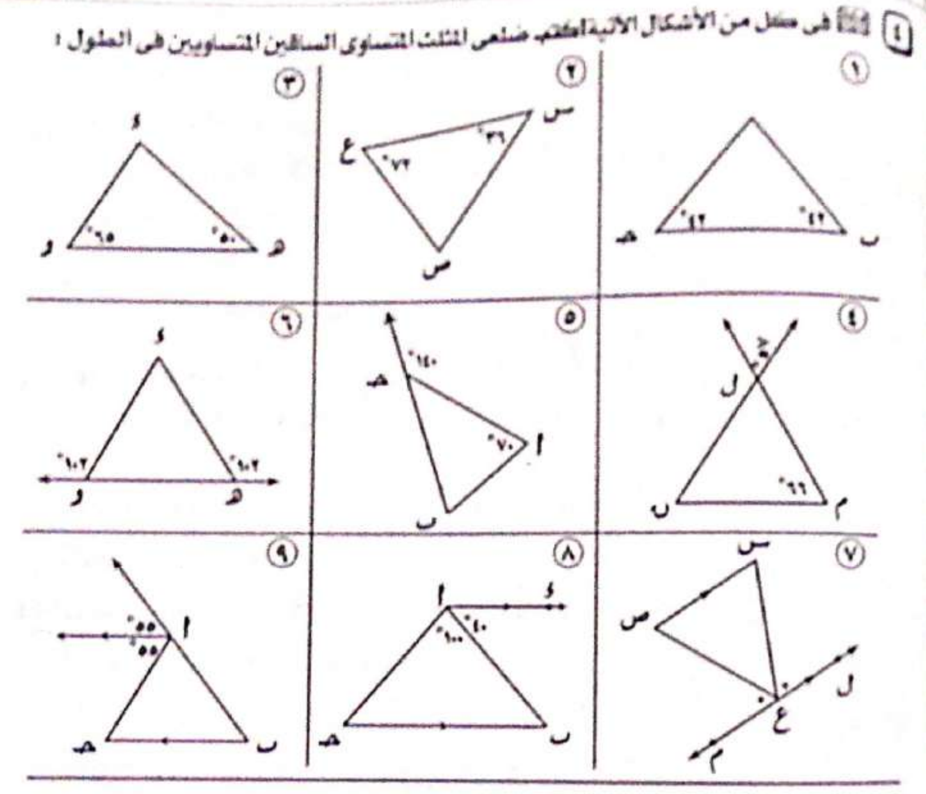
④ إذا كان قياس إحدى زوايا Δ قائم الزاوية ٤٥° كان المثلث ......

[متساوي الأضلاع ، متساوي الساقين ، مختلف الأضلاع ، متطابق الزوايا]

⑤ إذا كان المثلث أ ب جـ فيه جـ أ = جـ ب ، ق (∠ أ) = ق (∠ جـ) فإن ق (∠ ب) = ... [٣٠° ، ٦٠° ، ٩٠° ، ١٢٠°]



(٤) في كل من الأشكال الآتية أكتب ضلعي المثلث المتساوي الساقين المتساويين في الطول :



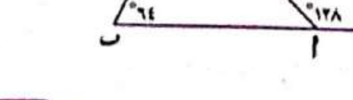
(٥) في الشكل المقابل :

ق (∠ أ) = ٤٠° ،

ق (∠ ب) = ٧٠°

أثبت أن : أ ب = أ جـ

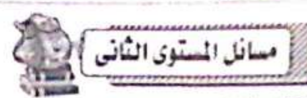
(٦) في الشكل المقابل :

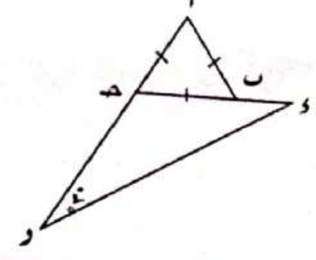


د ∈ ب أ ، ق (∠ ب) = ٦٤° ،

ق (∠ د أ جـ) = ١٢٨°

أثبت أن : أ ب = أ جـ





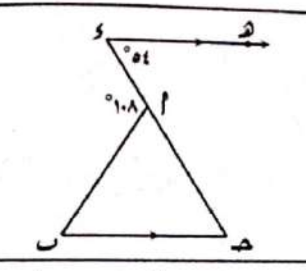
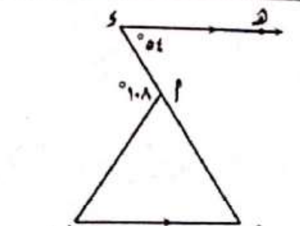
(٧) في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع

و ∈ أجـ ، د ∈ جـ ب ،

ق (∠ د و جـ) = ٣٠°

أثبت أن : △ د جـ و متساوي الساقين

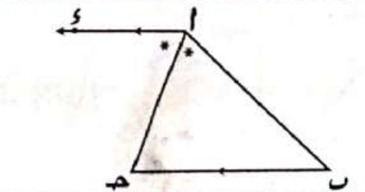
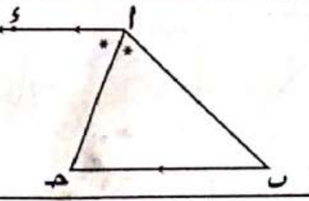
(٨) في الشكل المقابل :

د هـ // ب جـ ، أ ∈ د جـ ،

ق (∠ د) = ٥٤° ،

ق (∠ د أ ب) = ١٠٨°

أثبت أن : △ أ ب جـ متساوي الساقين

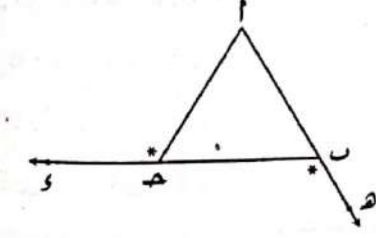
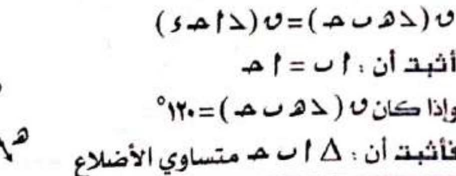



(٩) في الشكل المقابل :

ق (∠ ب أ جـ) = ق (∠ جـ أ د) ،

أ د // ب جـ

أثبت أن : أ ب = ب جـ

(١٠) في الشكل المقابل :

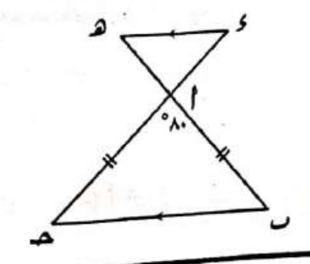
هـ ∈ أ ب ، د ∈ ب جـ ،

ق (∠ هـ ب جـ) = ق (∠ أ جـ د)

أثبت أن : أ ب = أ جـ

وإذا كان ق (∠ هـ ب جـ) = ١٢٠°

فأثبت أن : △ أ ب جـ متساوي الأضلاع



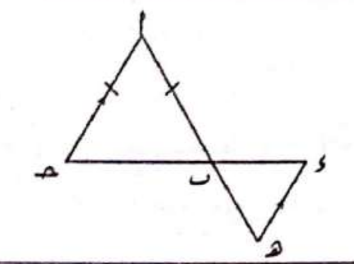
(١١) في الشكل المقابل :

د جـ ∩ ب هـ = {أ} ، أ ب = أ جـ ،

د هـ // ب جـ ، ق (∠ ب أ جـ) = ٨٠°

أوجد ق (∠ ب)

ثم برهن أن : △ أ د هـ متساوي الساقين



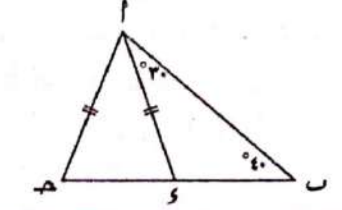
(١٢) في الشكل المقابل :

أ ب = أ جـ ،

د جـ ∩ أ هـ = {ب} ،

د هـ // أ جـ

أثبت أن : هـ د = هـ ب

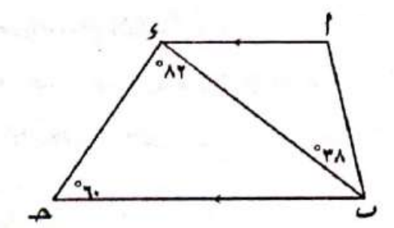


(١٣) في الشكل المقابل :

أ د = أ جـ ، ق (∠ ب) = ٤٠°

ق (∠ ب أ د) = ٣٠°

أثبت أن : أ ب = جـ ب

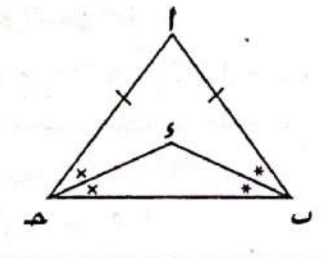


(١٤) في الشكل المقابل :

أ د // ب جـ ، ق (∠ ب د جـ) = ٨٢° ،

ق (∠ جـ) = ٦٠° ، ق (∠ أ ب د) = ٣٨°

أثبت أن : أ ب = أ د



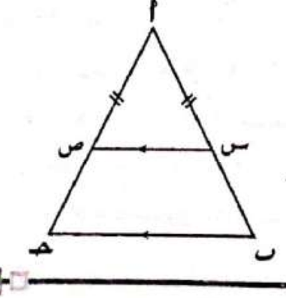
(١٥) في الشكل المقابل :

أ ب = أ جـ ،

ب د ينصف ∠ أ ب جـ ،

جـ د ينصف ∠ أ جـ ب

أثبت أن : △ د ب جـ متساوي الساقين



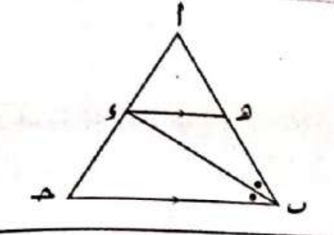
(١٦) في الشكل المقابل :

أ س = أ ص ،

ب ∈ أ س ، جـ ∈ أ ص

بحيث ب جـ // س ص

أثبت أن : أ ب = أ جـ

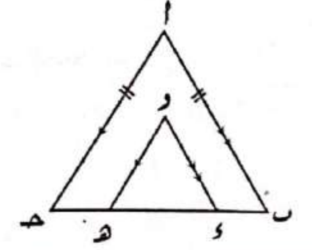


(١٧) في الشكل المقابل :

بد ينصف ∠ ا ب جـ ، ويقطع اجـ في د

د هـ // جـ ب حيث هـ ∈ اب

أثبت أن : △ هـ ب د متساوي الساقين



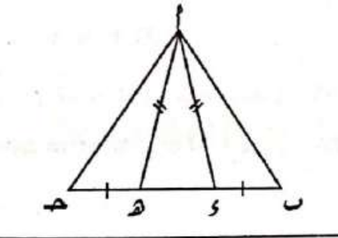
(١٨) في الشكل المقابل :

ا ب جـ مثلث فيه اب = اجـ ،

د ، هـ ∈ ب جـ ، و نقطة داخل المثلث

بحيث و د // اب ، و هـ // اجـ

أثبت أن : و د = و هـ

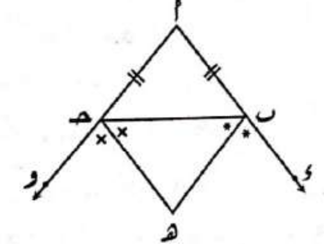
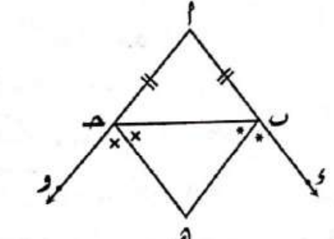


(١٩) في الشكل المقابل :

ا ب جـ △ فيه د ، هـ ∈ ب جـ ،

ا د = ا هـ ، ب د = هـ جـ

أثبت أن : اب = اجـ

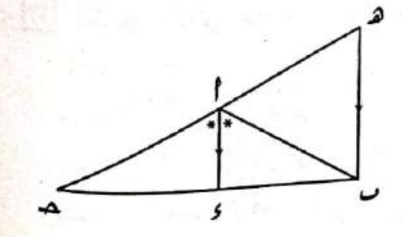
(٢٠) في الشكل المقابل :

اب = اجـ ، د ∈ ا ب ، و ∈ ا جـ ،

ب هـ ينصف ∠ د ب جـ ،

جـ هـ ينصف ∠ ب جـ و

أثبت أن : هـ ب = هـ جـ



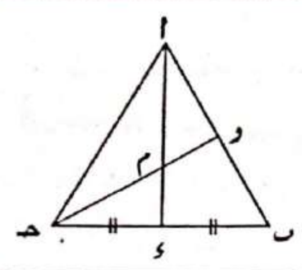
(٢١) في الشكل المقابل :

ا ∈ جـ هـ ، اد ينصف ∠ ب ا جـ ، د ا // ب هـ

أثبت أن △ ا ب هـ متساوي الساقين

و إذا كان ق (∠ د ا جـ) = ٦٠°

أثبت أن △ ا ب هـ متساوي الأضلاع



(٣٢) في الشكل المقابل :

ا ب جـ مثلث فيه ق (∠ ب) = ق (∠ جـ) ،

د منتصف ب جـ ، م ∈ ا د بحيث

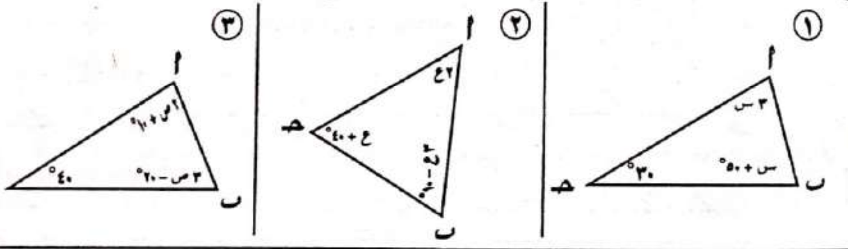
ا م = $\frac{٢}{٣}$ ا د ، جـ م ∩ ا ب = { و }

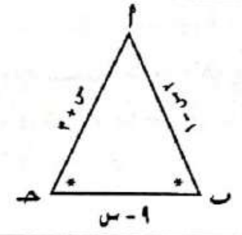
أثبت أن ب و = $\frac{١}{٢}$ ا جـ

(٣٣) ا ب جـ د شكل رباعي فيه ق (∠ جـ) = ٩٠° ، ب جـ = جـ د ، ق (∠ جـ ب ا) = ق (∠ جـ د ا)

أثبت أن : ا ب = ا د

(٣٤) في كل من الأشكال الآتية اكتب أضلاع المثلث المتساوية في الطول :





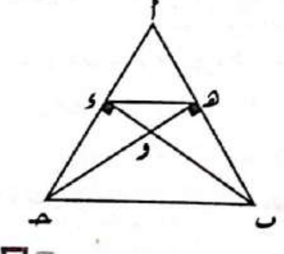
(٣٥) في الشكل المقابل :

ا ب جـ مثلث فيه

ق (∠ ب) = ق (∠ جـ)

أوجد محيط المثلث

مسائل المتفوقين



(٣٦) في الشكل المقابل :

ق (∠ ا ب جـ) = ق (∠ ا جـ ب) ،

ب د ⊥ ا جـ ، جـ هـ ⊥ ا ب ،

جـ هـ ∩ ب د = { و }

أثبت أن : و ب = و جـ ، و هـ = و د

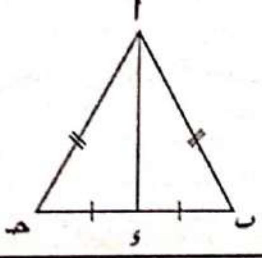
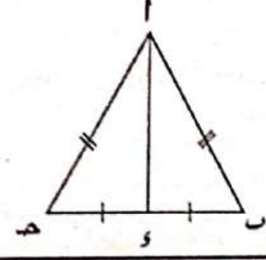


نتائج على نظريات المثلث المتساوي الساقين

• للمثلث المتساوي الساقين عدة نتائج هامة تتلخص فيما يلي :

نتيجة

متوسط المثلث المتساوي الساقين المرسوم من الرأس ينصف زاوية الرأس و يكون عمودياً على القاعدة

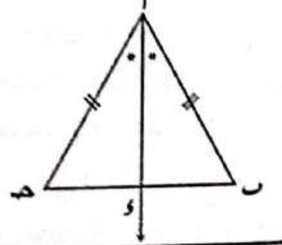
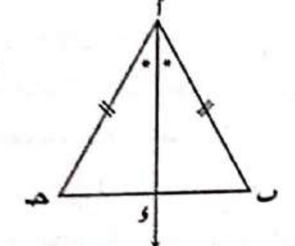
فمثلاً : إذا كان أ ب حـ مثلث فيه أ ب = أ حـ ، $\overline{أ ء}$ متوسط فإن :

① $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف زاوية الرأس ∠ ب أ حـ

② $\overline{أ ء} \perp \overline{ب حـ}$

نتيجة

منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوي الساقين ينصف القاعدة و يكون عمودياً عليها

فمثلاً : إذا كان أ ب حـ مثلث فيه أ ب = أ حـ ، $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ ب أ حـ فإن :

① ء منتصف $\overline{ب حـ}$ أي ب ء = ء حـ

② $\overline{أ ء} \perp \overline{ب حـ}$

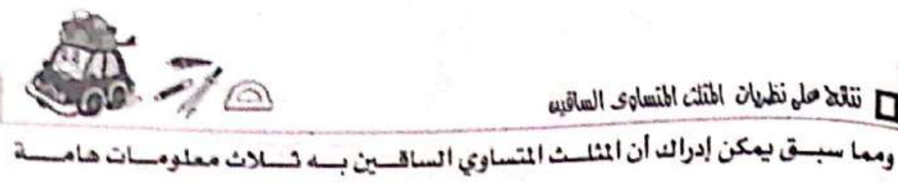
نتيجة

المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوي الساقين عمودياً على القاعدة ينصف كلاً من القاعدة و زاوية الرأس

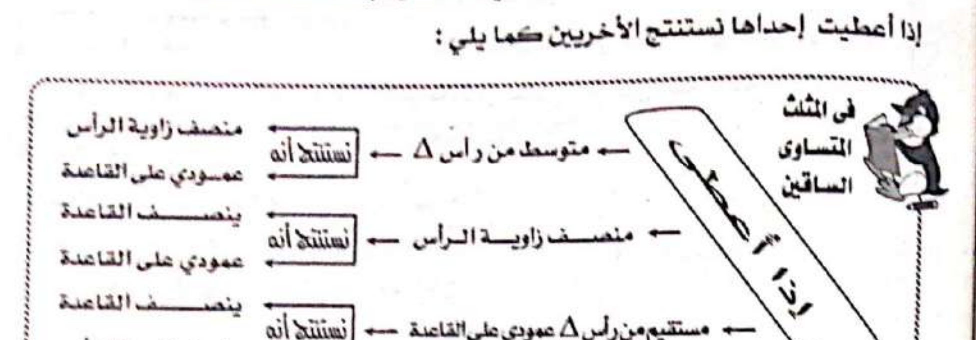
فمثلاً : إذا كان أ ب حـ مثلث فيه أ ب = أ حـ ، $\overline{أ ء} \perp \overline{ب حـ}$ فإن :

① ء منتصف $\overline{ب حـ}$ أي ب ء = ء حـ

② ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ حـ أ ء)



ومما سبق يمكن إدراك أن المثلث المتساوي الساقين به ثلاث معلومات هامة إذا أعطيت إحداها نستنتج الأخريين كما يلي :



محور تماثل المثلث المتساوي الساقين

محور تماثل المثلث المتساوي الساقين هو المستقيم المرسوم من رأسه عمودياً على قاعدته

ففي الشكل المقابل :

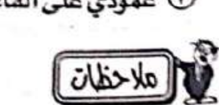
إذا كان أ ب حـ مثلث فيه أ ب = أ حـ ، $\overleftrightarrow{أ ء} \perp \overline{ب حـ}$ فإن $\overleftrightarrow{أ ء}$ يسمى محور تماثل المثلث أ ب حـ

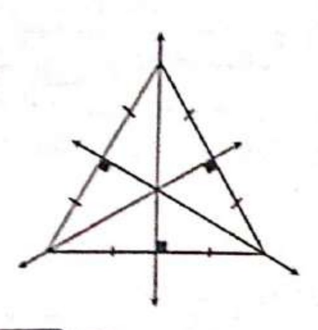
لاحظ أن محور تماثل المثلث المتساوي الساقين :

① ينصف القاعدة

② ينصف زاوية الرأس

③ عمودي على القاعدة





• المثلث المتساوي الأضلاع له ثلاثة محاور تماثل حيث يمر محور التماثل بأحد رؤوس المثلث عموديا على القاعدة المقابلة لهذه الرأس من منتصفها كما بالشكل

• المثلث المختلف الأضلاع ليس له محاور تماثل





محور تماثل القطعة المستقيمة

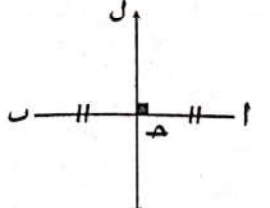
يسمى المستقيم العمودى على قطعة مستقيمة من منتصفها محور تماثل لهذه القطعة المستقيمة و للأختصار يسمى محور القطعة المستقيمة

ففي الشكل المقابل :

إذا كانت جـ منتصف أب

المستقيم ل ⊥ أب ماراً بنقطة جـ

فإن المستقيم ل هو محور أب



خاصية هامة

أي نقطة على محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها

فمثلاً : إذا كان المستقيم ل محور أب

و كانت جـ ∈ ل فإن أ جـ = ب جـ

و إذا كانت هـ ∈ ل فإن أ هـ = ب هـ

و العكس صحيح أي أنه :

إذا كانت أب قطعة مستقيمة و جـ نقطة بحيث أ جـ = ب جـ فإن جـ تقع على محور أب

أي أنه إذا كانت نقطة على بعدين متساويين من طرفى قطعة مستقيمة فإن هذه النقطة تقع على محور هذه القطعة المستقيمة

أمثلة توضيحية

مثال ١ في الشكل المقابل :

س ص ع Δ فيه س ص = س ع ، س م ⊥ ص ع ، ق(∠ص س م) = ٣٥° ، ص ع = ٨ سم

أوجد : ① ق(∠م س ع)

② طول ص م



الحل

المعطيات | س ص = س ع ، س م ⊥ ص ع ، ق(∠ص س م) = ٣٥° ، ص ع = ٨ سم

المطلوب | ق(∠م س ع) ، طول ص م

البرهان | في Δ س ص ع

∵ س ص = س ع ، س م ⊥ ص ع

∴ س م ينصف القاعدة ص ع وينصف زاوية الرأس ∠ص س ع

∴ ق(∠م س ع) = ق(∠م س ص) = ٣٥° # ①

∴ ص م = ع م = $\frac{٨}{٢}$ = ٤ سم # ②

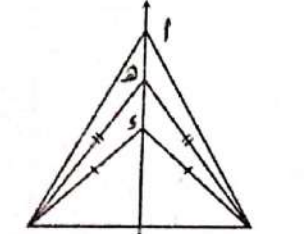
مثال ٢ في الشكل المقابل :

أ ∈ هـ د ،

د ب = د جـ ،

هـ ب = هـ جـ

أثبت أن : أ ب = أ جـ



الحل

المعطيات | د ب = د جـ ، هـ ب = هـ جـ

المطلوب | أ ب = أ جـ

البرهان | ∵ د ب = د جـ

∴ د ∈ محور ب جـ

∵ هـ ب = هـ جـ ∴ هـ ∈ محور ب جـ

∴ د هـ محور ب جـ ∵ أ ∈ د هـ (محور ب جـ)

∴ أ ب = أ جـ


#

[٣] في الشكل المقابل :

اب حـ ء شكل رباعي فيه

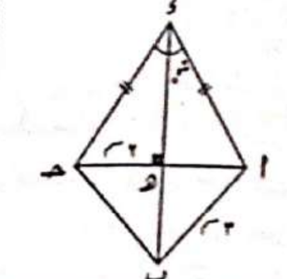
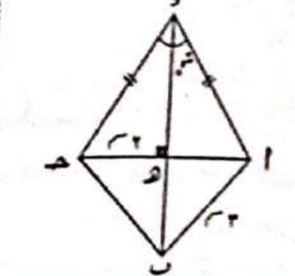
اء = حـ ء ، اجـ ∩ ب ء = { هـ }

بحيث ء ب ⊥ اجـ ، ق(∠ اء حـ) = ٦٠°

هـ حـ = ٢ سم ، اب = ٣ سم

أوجد : ① ق (∠ اء هـ)

② طول كل من اهـ ، حـ ب

الحل

المعطيات	اء = حـ ء ، ق (∠ اء حـ) = ٦٠° ، هـ حـ = ٢ سم ، اب = ٣ سم
المطلوب	ق (∠ اء هـ) ، طول كل من اهـ ، حـ ب
البرهان	في △ احـ ء :
	∵ اء = حـ ء ، ء هـ ⊥ اجـ
	∴ ء هـ ينصف ∠ اء حـ ، هـ منتصف اجـ
	∴ ق (∠ اء هـ) = ٦٠ / ٢ = ٣٠° ، اهـ = هـ حـ = ٢ سم
	في △ اب حـ :
	∵ ب هـ ⊥ اجـ ، هـ منتصف اجـ ∴ ب هـ محور اجـ
	∴ اب = حـ ب ∴ حـ ب = ٣ سم

#



تدريب (١)

في الشكل المقابل :

اب حـ ء شكل رباعي فيه

اب = اء ، اجـ ∩ ب ء = { هـ } ،

اهـ ⊥ ب ء ، ب هـ = ٣ سم ،

ق (∠ حـ اء) = ٣٠° ، ق (∠ اب حـ) = ١١٠°

أكمل ما يأتي :

① ق (∠ ب اهـ) = ...°

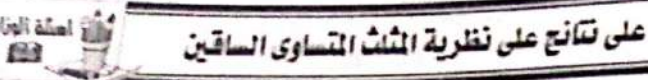
② ق (∠ اب هـ) = ...°

③ ق (∠ حـ ب هـ) = ...°

④ هـ ء = ... سم

⑤ اب = ... سم

⑥ ق (∠ حـ ء ب) = ...°



تمارين (٥) على نتائج على نظرية المثلث المتساوي الساقين

أسئلة الوزارة

أولاً : راجع معنا واختبر نفسك — ١٠ — ١/٢ ساعة امتحان ومراجعة

اختبار تراكمي (٤)

[١] (أ) في الشكل المقابل :

إذا كان اب حـ △ ، ء ، هـ ∈ ب حـ

بحيث اء = ب ء = اهـ = حـ هـ = ء هـ

أكمل ما يأتي :

① ق (∠ ء اهـ) = ق (∠ ......) = ق (∠ ......) = ...°

② ق (∠ اء ب) = ق (∠ ......) = ...°

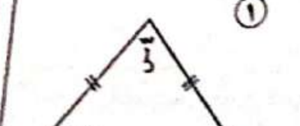
③ ق (∠ اب ء) = ...° ، ق (∠ احـ هـ) = ...°

④ ق (∠ ب احـ) = ...°

٤ درجات

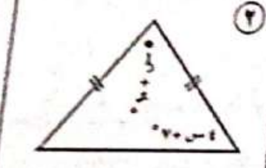
(ب) في كل مما يأتي أوجد قيمة س : ٣ درجات

①



س = ...

②



س = ...

③

٩٥°

س = ...

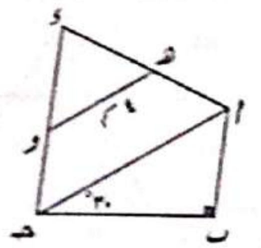
(حـ) في الشكل المقابل :

اب حـ ء شكل رباعي فيه ق (∠ ب) = ٩٠° ،

هـ منتصف اء ، و منتصف حـ ء ،

ق (∠ احـ ب) = ٣٠° ، هـ و = ٤ سم

أوجد طول اب



....

....

....

٣ درجات

ثانياً : أجب عما يأتي :

مسائل المستوى الأول

[٢] أكمل ما يأتي :

① عدد محاور تماثل المثلث المتساوي الأضلاع هو ....

② متوسط المثلث المتساوي الساقين المرسوم من الرأس ....

③ محور تماثل القطعة المستقيمة هو ....

④ أي نقطة على محور تماثل قطعة مستقيمة تكون على ....

⑤ منصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين يكون ....، ....

⑥ المستقيم العمودي على القطعة المستقيمة من منتصفها يسمى ....

⑦ المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوي الساقين عمودياً على القاعدة يسمى ....

⑧ في Δ أ ب جـ إذا كان أ ب = أ جـ ، ق(∠ أ) = ٦٠° يكون له .... تماثل

⑨ في Δ أ ب جـ إذا كان أ ب = أ جـ ، ق(∠ ب) = ٥٠° فإن له .... تماثل

⑩ إذا كان Δ أ ب جـ له محور تماثل واحد ماراً بالرأس جـ ، ق(∠ أ) = ٧٠° ، فإن ق(∠ ب) = ...

[٣] اختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس :

① عدد محاور تماثل المثلث المتساوي الساقين ....
[محور واحد أ، محوران أ، ثلاثة محاور أ، أربعة محاور]

② المثلث المختلف الأضلاع له .... محور تماثل
[صفر أ، ١ أ، ٢ أ، ٣]

③ إذا كان أ ب جـ د شكل رباعي فيه أ ب = أ د ، ب جـ = د جـ فإن $\overleftrightarrow{أجـ}$ .... $\overline{ب د}$
[يوازي أ، يساوي أ، محور تماثل أ، يطابق]

④ إذا كان جـ ∈ محور تماثل $\overline{أب}$ فإن ....
[أ جـ = ب جـ أ، $\overline{أجـ} // \overline{ب جـ}$ أ، أ جـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ أ، أ ب = أ جـ]

⑤ يسمى المستقيم العمودي على القطعة المستقيمة من منتصفها .... لها
[عمود أ، منصف أ، متوسط أ، محور تماثل]

⑥ إذا كان Δ أ ب جـ له محور تماثل واحد وفيه ق(∠ أ ب جـ) = ١٢٠° فإن ق(∠ أ) = ... [٣٠° أ، ٤٠° أ، ٦٠° أ، ١٢٠°]

⑦ المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب ، ق(∠ أ) = ٥٥° فإن عدد محاور تماثله = ...
[واحد أ، اثنان أ، ثلاثة أ، صفر]

⑧ إذا كان أ ب جـ مثلث فيه ق(∠ ب) = ٤٥° ، ق(∠ أ) = ٩٠° فإن عدد محاور تماثله = ... [واحد أ، اثنان أ، ثلاثة أ، صفر]

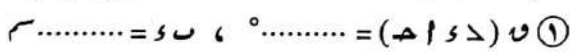
⑨ المثلث الذي أطوال أضلاعه ٢ سم ، (س + ٣) سم ، ٥ سم يكون متساوي الساقين عندما س = ... [١ أ، ٢ أ، ٣ أ، ٤]

⑩ إذا كان طول أي ضلع في المثلث = $\frac{1}{3}$ محيط هذا المثلث فإن عدد محاور التماثل للمثلث = ... [صفر أ، ١ أ، ٢ أ، ٣]

[٤] في الشكل المقابل :

أ ب جـ Δ فيه أ ب = أ جـ ، $\overline{أد} \perp \overline{ب جـ}$

ق(∠ ب أ د) = ٢٥° ، ب جـ = ٤ سم **أكمل ما يأتي :**

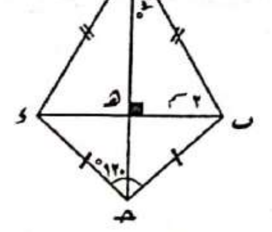


① ق(∠ د أ جـ) = ...° ، ب د = ... سم

② ق(∠ أ ب جـ) = ...° ، د جـ = ... سم

③ محور تماثل Δ أ ب جـ هو ....

[٥] في الشكل المقابل :



أ ب جـ د شكل رباعي فيه أ ب = أ د ، ب جـ = جـ د ، $\overline{أجـ} \perp \overline{ب د}$ يقطعه في هـ ، ب هـ = ٢ سم ، ق(∠ ب أ هـ) = ٣٠° **أكمل ما يأتي :**

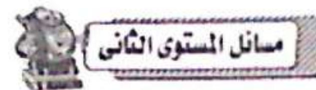
① ق(∠ د أ هـ) = ...° ، ق(∠ أ د هـ) = ...°

② ق(∠ ب جـ هـ) = ...° ، ق(∠ جـ ب هـ) = ...°

③ هـ د = ... سم ، أ ب = ... سم

④ عدد محاور تماثل Δ ب جـ د هو ...... وعدد محاور تماثل Δ أ ب د هو ....





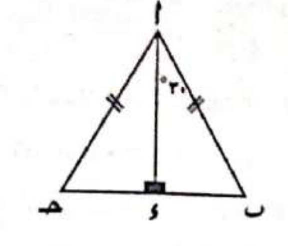
(٦) في الشكل المقابل :

أب = أجـ ، ب جـ = ٨ سم ،

ق(∠ب أ ء) = ٣٠° ، أء ⊥ ب جـ

(١) احسب طول ب ء ، أب ، ق(∠جـ)

(٢) ما عدد محاور تماثل △ أ ب جـ ؟



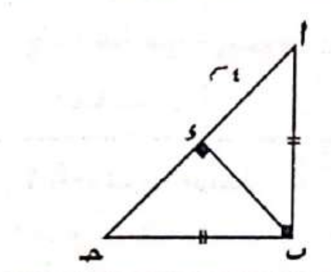
(٧) في الشكل المقابل :

أب = ب جـ ، أب ⊥ ب جـ ،

ب ء ⊥ أجـ ، أء = ٤ سم

احسب : طول أجـ ، ق(∠ء ب جـ)


برهن أن : △ ء ب جـ متساوي الساقين

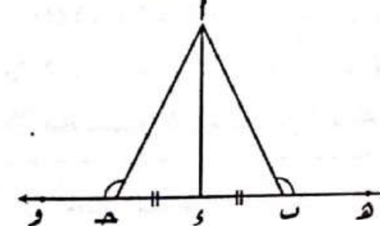
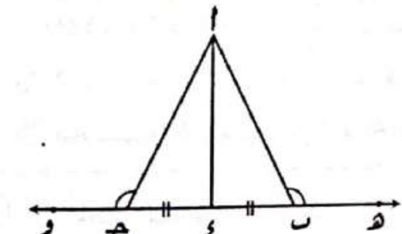


(٨) في الشكل المقابل :

ء ب = ء جـ ،

ق(∠أ ب هـ) = ق(∠أ جـ و)

أثبت أن : أء ⊥ ب جـ

(٩) في الشكل المقابل :

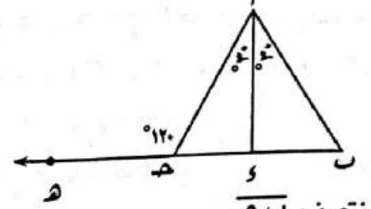
أ ب جـ مثلث ،

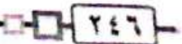
ق(∠ب أ ء) = ق(∠جـ أ ء) = ٣٠°

هـ ∈ ب جـ بحيث ق(∠أ جـ هـ) = ١٢٠°

أثبت أن : (١) أء ⊥ ب جـ (٢) ء منتصف ب جـ

(٣) ما هو عدد محاور تماثل المثلث أ ب جـ ؟







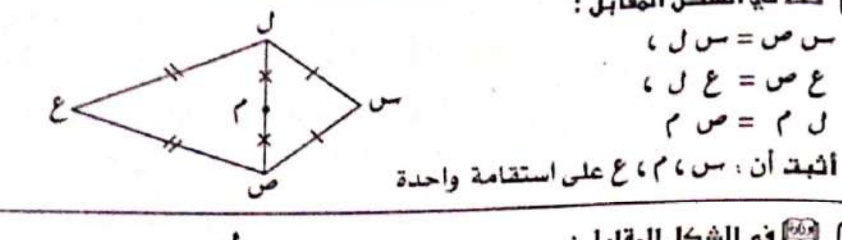
(١٠) في الشكل المقابل :

س ص = س ل ،

ع ص = ع ل ،

ل م = ص م

أثبت أن : س ، م ، ع على استقامة واحدة



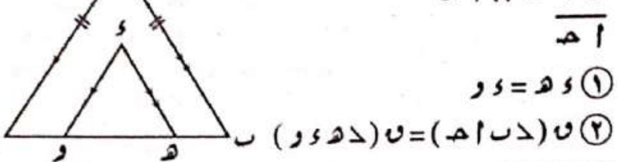
(١١) في الشكل المقابل :

أب = أجـ ، ء هـ // أب

ء و // أجـ

أثبت أن : (١) ء هـ = ء و


(٢) ق(∠ب أ جـ) = ق(∠هـ ء و)



(١٢) في الشكل المقابل :

△ أ ب جـ فيه أب = أجـ ، ب جـ = ١٠ سم

أء ⊥ ب جـ ، ق(∠جـ أ ء) = ٣٠°

(١) أوجد طول ب ء

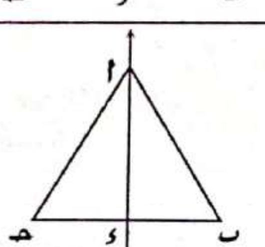
(٢) أثبت أن △ أ ب جـ متساوي الأضلاع

(١٣) في الشكل المقابل :

أء↔ محور تماثل ب جـ ،

أب = أجـ = ب جـ

احسب : قياسات زوايا △ أ ب ء



(١٤) في الشكل المقابل :

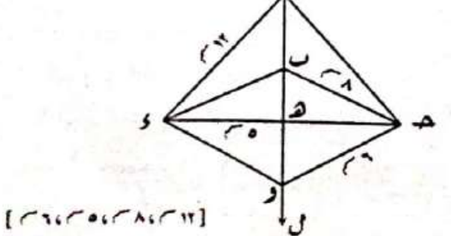
ل محور تماثل جـ ء

هـ ء = ٥ سم ، ب جـ = ٨ سم

أء = ١٢ سم ، جـ و = ٦ سم

أوجد طول كلاً من :

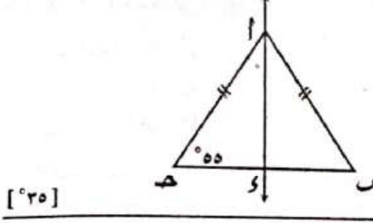
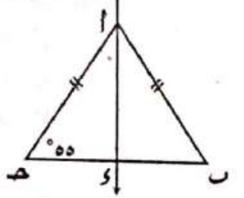
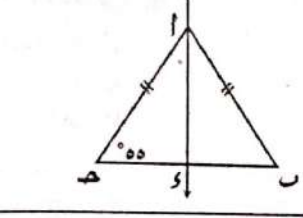
أجـ ، ب ء ، جـ هـ ، و ء



[١٢ سم ، ٨ سم ، ٥ سم ، ٦ سم]

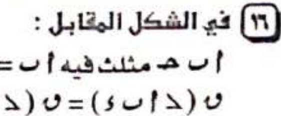
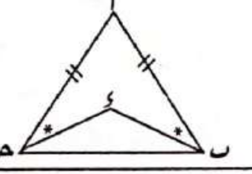



(١٥) في الشكل المقابل :

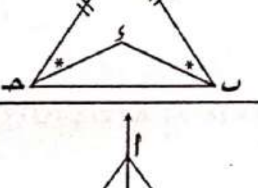
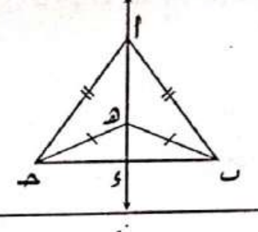
أ ب = أ جـ ،
$\overleftrightarrow{أ ء}$ محور تماثل △ أ ب جـ ،
ق (∠ جـ) = ٥٥°
أوجد : ق (∠ ب أ ء) [٣٥°]

(١٦) في الشكل المقابل :

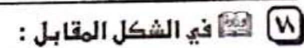



أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ ،
ق (∠ أ ب ء) = ق (∠ أ جـ ء)
أثبت أن : $\overleftrightarrow{أ ء}$ محور $\overline{ب جـ}$

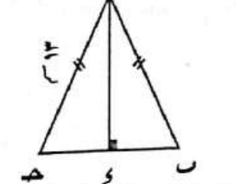
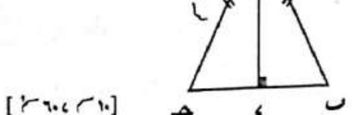
(١٧) في الشكل المقابل :

أ ب = أ جـ ،
هـ ب = هـ جـ
أثبت أن : $\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$

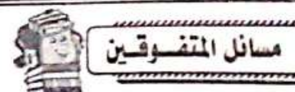


(١٨) في الشكل المقابل :

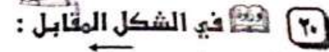



أ ب جـ △ فيه أ ب = أ جـ = ١٣ سم
$\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$ ، ب ء = ٥ سم
(١) أوجد طول $\overline{ب جـ}$ ،
(٢) أوجد مساحة △ أ ب جـ [١٠ سم ، ٦٠ سم²]

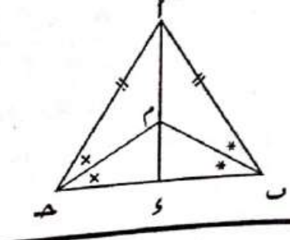
(١٩) أ ب جـ △ متطابق الساقين ، رسم محور التماثل المستقيم ل يمر بالرأس أ
فإذا كان ل ∩ $\overline{ب جـ}$ = { ء } ، هـ ∈ $\overline{أ ء}$ بحيث أ هـ = ب ء
أثبت أن : △ △ أ هـ ب ، أ هـ جـ متطابقان ثم أثبت أن : جـ ء = أ هـ



مسائل المتفوقين



(٢٠) في الشكل المقابل :



أ ب = أ جـ ، $\overrightarrow{ب م}$ ينصف ∠ أ ب جـ ،
$\overrightarrow{جـ م}$ ينصف ∠ أ جـ ب
أثبت أن : $\overleftrightarrow{أ م} \perp \overline{ب جـ}$



اختبارات (٣)

اختبارات مراجعة على ما سبق

اختبار مراجعة على ما سبق — ٣٠ — نموذج (١)

(١) أكمل ما يأتي : ١٠ درجات

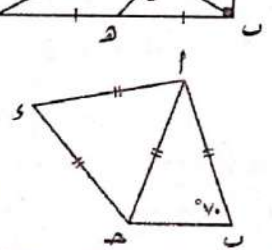
① نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة .... من جهة القاعدة

② متوسط المثلث هو ....

③ في الشكل المقابل :

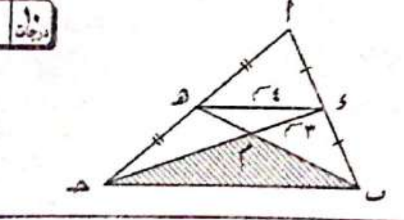
ب و = ... سم

④ في الشكل المقابل :



ق (∠ ب أ ء) = ...°

(٢) في الشكل المقابل : ١٠ درجات



ء ، هـ منتصفا $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ ،
$\overline{ب هـ} \cap \overline{ء جـ}$ = { م } ، ء هـ = ٤ سم ،
ء م = ٣ سم ، ب هـ = ٦ سم
أوجد بالبرهان محيط △ ب م جـ

(٣) أ ب جـ مثلث متساوي الساقين فيه أ ب = أ جـ ، ١٠ درجات
ب جـ = ٦ سم ، $\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$ يقطعها في ء ، ق (∠ ب أ ء) = ٢٥°
أوجد ق (∠ ء أ جـ) ، طول $\overline{ب ء}$

اختبار مراجعة على ما سبق ٣٠ — نموذج (٢)

١٠ درجات

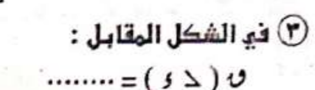
[١] أكمل ما يأتي :

① طول متوسط △ القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوي .... الوتر

[طول أ، نصف طول أ، ضعف طول أ، ثلث طول]

② قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوي الأضلاع = ...

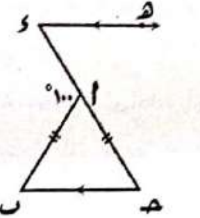
[٣٠° أ، ٩٠° أ، ١٢٠° أ، ١٥٠°]



③ **في الشكل المقابل :**

ق(∠ د) = ...

[١٠٠° أ، ٨٠° أ، ٥٠° أ، ٤٠°]

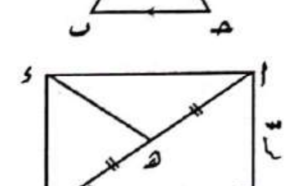


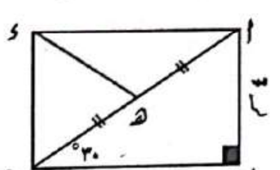
④ **في الشكل المقابل :**

أ ب جـ د مستطيل، هـ منتصف $\overline{أجـ}$

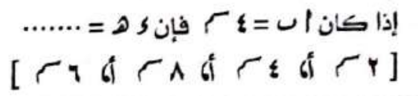
إذا كان أ ب = ٤ سم فإن د هـ = ...

[٢ سم أ، ٤ سم أ، ٨ سم أ، ٦ سم]









١٠ درجات

[٢] في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ، $\overline{أد} \perp \overline{ب جـ}$،

ق(∠ ب أ د) = ٣٠°، هـ ∈ $\overrightarrow{أد}$ بحيث

ق(∠ ب هـ جـ) = ٨٠°، ب د = ٤ سم

أكمل ما يأتي :

① ق(∠ جـ أ د) = ...° ② د جـ = ... سم

③ ق(∠ ب هـ د) = ...° ④ أ جـ = ... سم

١٠ درجات

[٣] في الشكل المقابل :

ق(∠ د) = ٤٠°،

ق(∠ جـ أ د) = ٣٠°،

أ جـ = أ ب

أوجد بالبرهان : ق(∠ ب أ جـ)



اختبار مراجعة على ما سبق ٣٠ — نموذج (٣)

١٠ درجات

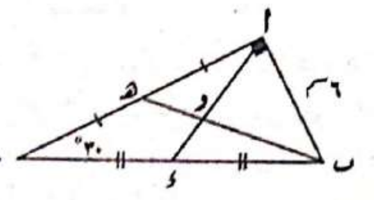
[١] أكمل ما يأتي :

① أى نقطة على محور تماثل القطعة المستقيمة تكون ....

② إذا كان قياسا زاويتين في مثلث ٧٠°، ٤٠° فإن عدد محاور التماثل لهذا المثلث = ...

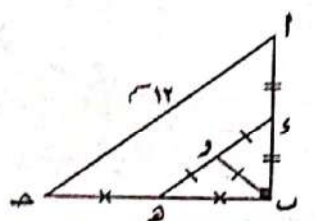
③ **في الشكل المقابل :**

أ و = ... سم



④ **في الشكل المقابل :**

ب و = ...



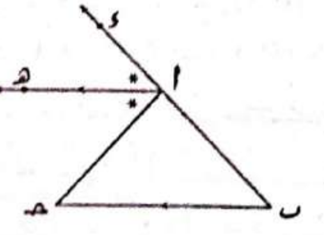
١٠ درجات

[٢] في الشكل المقابل :

أ ∈ $\overline{ب د}$، $\overrightarrow{أهـ} \parallel \overline{ب جـ}$،

$\overrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠ جـ أ د

أثبت أن : أ ب = أ جـ



١٠ درجات

[٣] في الشكل المقابل :

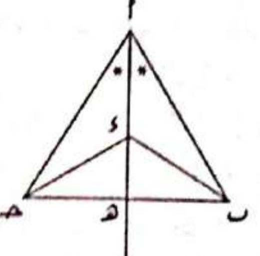
أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ،

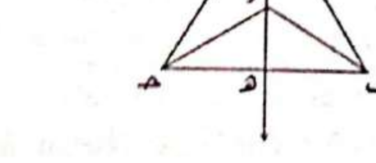
$\overrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠ ب أ جـ،

$\overrightarrow{أهـ} \cap \overline{ب جـ} = \{هـ\}$، د ∈ $\overline{أهـ}$

أثبت أن : ① ب هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

② د ب = د جـ







الوحدة الخامسة

التبـــاين

تسمى كل من > ، < علامة التباين وتسمى " ا ب > جـ د " متباينة أو علاقة تباين وهى تستخدم للمقارنة بين الأطوال والقياسات المختلفة

فمثلاً في Δ ا ب جـ :

إذا كان ا ب = ٣ سم ، ب جـ = ٦ سم ، ا جـ = ٥ سم
فإننا نستنتج أن طول ب جـ أكبر من طول ا جـ
ونكتب ب جـ > ا جـ وأيضاً نستنتج أن ا جـ > ا ب
أي أن ب جـ > ا جـ > ا ب

ا ب جـ ٥ سم ٣ سم ٦ سم

وأيضاً في Δ س ص ع :

إذا كان ق (∠ ص) = ٧٠° ،
ق (∠س) = ٨٠° ، ق (∠ع) = ٣٠°
فإننا نستنتج أن ق (∠ س) > ق (∠ ص) ،
ق (∠ص) > ق (∠ع) وأن ق (∠س) > ق (∠ع)
أى أن ق (∠ س) > ق (∠ ص) > ق (∠ ع)

س ص ع ٨٠° ٧٠° ٣٠°

و لعلاقة التباين مسلمات تسمى مسلمات التباين سوف نعرضها فيما يلي :

مسلمات علاقة التباين

بفرض أن س ، ص ، ع ، ا ، ب أعداد :
(١) إذا كان س > ص فإن س + ع > ص + ع
(٢) إذا كان س > ص فإن س − ع > ص − ع
(٣) إذا كان س > ص وكان ع عدداً موجباً فإن س ع > ص ع
(٤) إذا كان س > ص ، ص > ع فإن س > ع
(٥) إذا كان س > ص ، ا > ب فإن س + ا > ص + ب

و يمكننا التأكد من المسلمات السابقة بوضع أعداد بدلاً من الرموز
فمثلاً بفرض أن س = ١٠ ، ص = ٦ ، ع = ٢ يمكن التأكد من صحة المسلمات



تذكر أن

قياس أي زاوية خارجة للمثلث أكبر من قياس أي زاوية داخلة ما عدا المجاورة لها

أمثلة توضيحية

مثال ١ في الشكل المقابل :
ب ∈ ا د ، جـ ∈ ا د
بحيث ا جـ > ب د
أثبت أن : ا ب > جـ د

ا ب جـ د

الحل

المعطيات | ا جـ > ب د
المطلوب | ا ب > جـ د
البرهان | ∵ ا جـ > ب د ، ب جـ مشتركة في كل منهما
بطرح طول ب جـ من كل منهما
∴ ا جـ − جـ ب > ب د − جـ ب
∴ ا ب > جـ د

#

مثال ٢ في الشكل المقابل :
ا ب جـ Δ فيه ا ب > ا جـ ، أخذت س ∈ ا ب ،
ص ∈ ا جـ بحيث س ب = ص جـ
أثبت أن : ا س > ا ص

ا س ص ب جـ

الحل

المعطيات | ا ب > ا جـ ، س ب = ص جـ
المطلوب | ا س > ا ص
البرهان | ∵ ا ب > ا جـ (١)
∵ س ب = ص جـ (٢)
بطرح (٢) من (١)
∴ ا ب − س ب > ا جـ − ص جـ
∴ ا س > ا ص

#





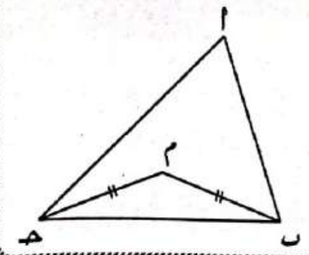
3 فى الشكل المقابل :

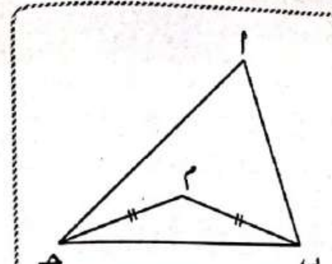
ا ب جـ △ فيه :

ق(∠ا ب جـ) > ق(∠ا جـ ب) ،

ب م = جـ م

أثبت أن : ق(∠ا ب م) > ق(∠ا جـ م)





الحل

المعطيات | ق(∠ا ب جـ) > ق(∠ا جـ ب) ، ب م = جـ م

المطلوب | ق(∠ا ب م) > ق(∠ا جـ م)

البرهان | ∵ ب م = جـ م

∴ ق(∠م ب جـ) = ق(∠م جـ ب) (1)

∵ ق(∠ا ب جـ) > ق(∠ا جـ ب) (2)

من (1) ، (2) بالطرح :

ق(∠ا ب جـ) − ق(∠م ب جـ) > ق(∠ا جـ ب) − ق(∠م جـ ب)

∴ ق(∠ا ب م) > ق(∠ا جـ م)

#

أمثلة للتدريب

تدريب (1)

في الشكل المقابل :

ا ب جـ مثلث، $\overleftrightarrow{اء} \cap \overleftrightarrow{ب جـ} = \{ء\}$

ضع دائرة حول الزاوية التي لها أكبر قياس فى كل مما يأتي :

(1) ∠1 ، ∠3 ، ∠4 (2) ∠4 ، ∠8 ، ∠9

(3) ∠2 ، ∠3 ، ∠7 (4) ∠7 ، ∠8 ، ∠10

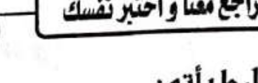


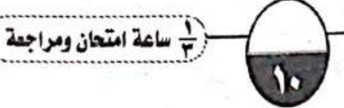
تمارين (6) على مسلمات التباين

اسئلة الوزارة

أولاً : راجع معنا و اختبر نفسك

10





1 (أ) أكمل ما يأتى :

(1) نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة 2 : 1 من جهة ....

(2) عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الأضلاع يساوى ....

(3) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث متساوى الساقين يساوى 60° كان المثلث ....

(4) فى المثلث المتساوى الساقين إذا كان قياس إحدى زاويتى القاعدة 65° فإن قياس زاوية رأسه = ...°

4 درجات

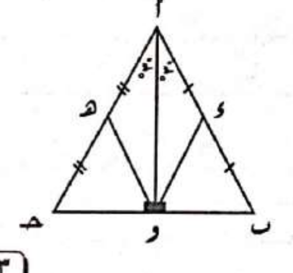
(ب) فى الشكل المقابل :

ا ب جـ △ فيه ء ، هـ منتصفى $\overline{ا ب}$ ، $\overline{ا جـ}$ على الترتيب ، $\overline{ا و} \perp \overline{ب جـ}$ ، ء و = و هـ = 4 سم فإن :

ا ب = ... سم ، ا جـ = ... سم

ب و = ... سم ، و جـ = ... سم

محيط △ ا ب جـ = ... سم



3 درجات

(جـ) فى الشكل المقابل :

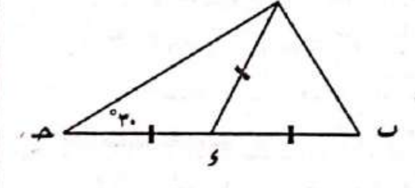
ء ∈ $\overline{ب جـ}$ بحيث

ء ا = ء ب = ء جـ ،

ق(∠جـ) = 30°

اثبت أن (1) △ ا ب ء متساوى الأضلاع

(2) △ ا ب جـ قائم الزاوية



....

....

....

....

3 درجات



ثانياً : أجب عما يأتي :

مسائل المستوى الأول

٢ في الشكل المقابل :

أوجد ق (∠ ا جـ ب)، ق (∠ ا جـ د)، ق (∠ د ا هـ)

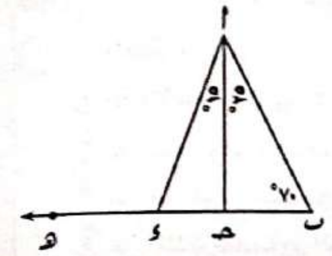
ثم أكمل باستخدام > أو < :

① ق (∠ د ا هـ) .... ق (∠ جـ ا د)

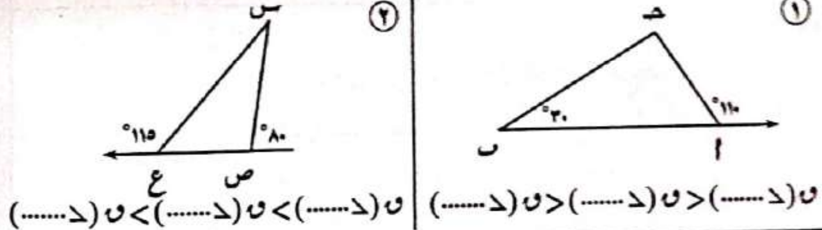
② ق (∠ د ا جـ) .... ق (∠ ا جـ ب)

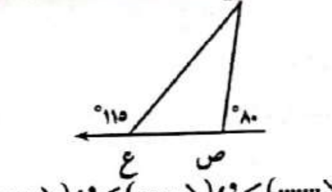
③ ق (∠ ا جـ د) .... ق (∠ ا ب جـ)

④ ق (∠ ا جـ د) .... ق (∠ د ا هـ)



٣ رتب زوايا المثلث ا ب جـ تصاعدياً و قياسات زوايا Δ س ص ع تنازلياً :





① ق(∠.....) < ق(∠.....) < ق(∠.....)

② ق(∠.....) > ق(∠.....) > ق(∠.....)

٤ (ا) ا ، ب ، جـ ، د أربع نقط على استقامة واحدة على الترتيب فأكمل بوضع علامة < أو > أو = في كل مما يأتي :

① إذا كان ا ب = ٣ سم ، جـ د = ٤ سم ، ب جـ = ٢ سم
فإن ا جـ .... ب د

② إذا كان ا ب = ٥ سم ، جـ د = ٦ سم ، ب جـ = ٣ سم
فإن ا ب - ب جـ .... جـ د - ب جـ

(ب) أكمل ما يأتي :

① إذا كان س ص = ل م فإن $\frac{1}{2}$ س ص .... $\frac{1}{2}$ ل م

② إذا كان ق (∠ ا) = ٦٠° ، ق (∠ ب) = ٤٠° ، ق (∠ جـ) = ١٠°
فإن ق (∠ ا) + ق (∠ جـ) .... ق (∠ ب) + ق (∠ جـ)

③ إذا كان ق (∠ ا) > ق (∠ ب) فإن مكملة ∠ ا ...... مكملة ∠ ب



٥ اختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس :

① إذا كان ا ، ب ، جـ أعداد موجبة وكان ا > ب فإن ا + جـ ...... ب + جـ
[< ، > ، = ، //]

② إذا كان ا ، ب عددين موجبين، جـ عدد سالب وكان ا > ب فإن ا + جـ .... ب + جـ
[< ، > ، = ، ≡]

③ إذا كان س ، ص عددين موجبين حيث س > ص وكان ع عدد سالب فإن س ع .... ص ع
[< ، > ، = ، ≡]

④ إذا كان ا ، ب ، جـ ثلاث أعداد موجبة وكان ا > ب ، ب > جـ فإن ا .... جـ
[< ، > ، = ، ≡]

⑤ إذا كان م ، ل ∈ $\overline{\text{س ص}}$ بحيث ص م > س ل فإن س م .... ل ص
[< ، > ، = ، //]

⑥ إذا كان $\overrightarrow{\text{ب د}}$ ينصف ∠ ا ب جـ فإن ق (∠ ا ب د) .... ق (∠ ا ب جـ)
[< ، > ، = ، ≡]

مسائل المستوى الثاني

٦ في الشكل المقابل :

ا ب = جـ د = ٢ سم ،
ب هـ = ٥ سم ، هـ جـ = ٣ سم

أثبت أن : ا هـ > هـ د

٧ في الشكل المقابل :

ا ب = جـ د ، ب هـ > هـ جـ

أثبت أن : ا هـ > هـ د

٨ في الشكل المقابل :

ا ب = ٤ سم ، جـ د = ٣ سم ، ب جـ = ٥ سم

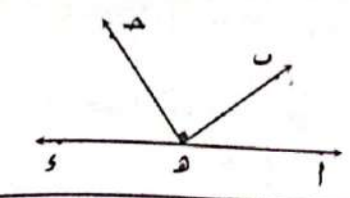
أثبت أن : ا جـ > ب د

٩ في الشكل المقابل :

ا ب > جـ د

أثبت أن : ا جـ > ب د

(١٠) **في الشكل المقابل :**



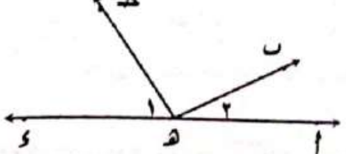
ق(∠ب هـ ء) = ١٥٠° ،

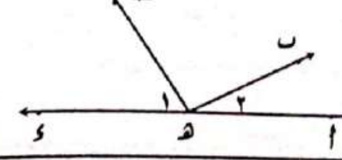
ق(∠أ هـ جـ) = ١٢٠° ،

ق(∠ب هـ جـ) = ٩٠°

أثبت أن : ق(∠أ هـ ب) < ق(∠جـ هـ ء)

(١١) **في الشكل المقابل :**

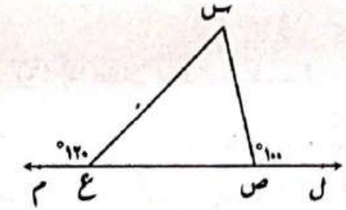




ق(∠ب هـ ء) > ق(∠أ هـ جـ)

أثبت أن : ق(∠١) > ق(∠٢)

(١٢) **في الشكل المقابل :**

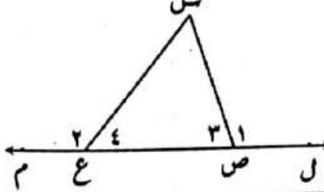


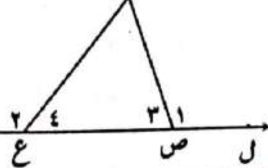
ق(∠س ع م) = ١٢٠° ،

ق(∠ل ص س) = ١٠٠°

أثبت أن : ق(∠س ع ص) < ق(∠س ص ع)

(١٣) **في الشكل المقابل :**

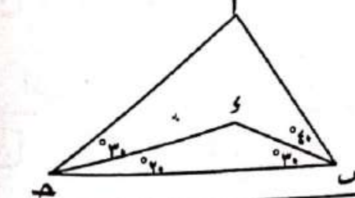


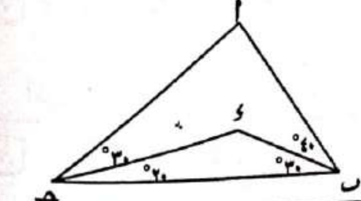


ق(∠١) > ق(∠٢)

أثبت أن : ق(∠٣) > ق(∠٤)

(١٤) **في الشكل المقابل :**





ق(∠ء ب جـ) = ٣٠° ، ق(∠ء جـ ب) = ٢٠° ،

ق(∠أ ب ء) = ٤٠° ، ق(∠أ جـ ء) = ٣٠°

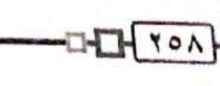
أثبت أن : ق(∠أ ب جـ) > ق(∠أ جـ ب)

(١٥) **في الشكل المقابل :**

ق(∠١) > ق(∠٢)

ق(∠٣) > ق(∠٤)

أثبت أن : ق(∠أ ب جـ) > ق(∠أ جـ ب)





(١٦) **في الشكل المقابل :**

ق(∠١) = ق(∠٣) ،

ق(∠٢) = ق(∠٤) ،

ق(∠١) > ق(∠٢)

أثبت أن : ق(∠أ ب جـ) > ق(∠أ جـ ب)

(١٧) **في الشكل المقابل :**

س ص = س ل

أثبت أن :

ق(∠س ص ع) > ق(∠س ع ص)

(١٨) **في الشكل المقابل :**

ق(∠جـ ب أ) > ق(∠جـ أ ب) ،

ء أ = ء ب

أثبت أن : ق(∠جـ ب ء) > ق(∠جـ أ ء)

(١٩) **في الشكل المقابل :**

أ ب جـ مثلث فيه أ جـ > أ ب ،

س ∈ أب ، ص ∈ أجـ بحيث

ق(∠أ س ص) = ق(∠أ ص س)

أثبت أن : ص جـ > س ب

(٢٠) أ ب جـ ∆ فيه ء ∈ أب بحيث ق(∠أ جـ ء) = ق(∠ب جـ ء)

أثبت أن : ق(∠أ ء جـ) > ق(∠أ جـ ء)

مسائل المتفوقين

(٢١) إذا كانت م نقطة داخل المثلث أ ب جـ فأثبت أن : ق(∠أ م ب) > ق(∠جـ)







المقارنة بين زوايا المثلث

نظرية

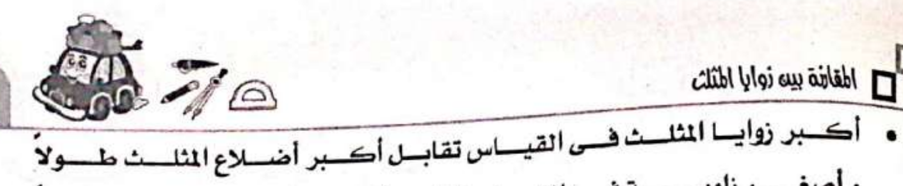
إذا اختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول يقابله زاوية أكبر فى القياس من قياس الزاوية المقابلة للآخر

المعطيات	△ ا ب جـ فيه ا ب > ا جـ
المطلوب	ق (∠ جـ) > ق (∠ ب)
العمل	نأخذ د ∈ ا ب بحيث ا د = ا جـ
البرهان	∵ △ ا جـ د فيه ا د = ا جـ
	∴ ق(∠١) = ق(∠٢)
	∵ ∠١ خارجة عن △ ب د جـ
	∴ ق(∠١) > ق(∠ب)
	∴ ق(∠٢) > ق(∠ب)
	∵ ق(∠جـ) > ق(∠٢)
	∴ ق(∠جـ) > ق(∠ب)

#

ملاحظات

• فى △ ا ب جـ إذا كان ا ب الضلع الأكبر فإن ∠ جـ هي الزاوية الكبرى وهي الزاوية المقابلة لهذا الضلع (لاحظ أن الضلع الأكبر حروفه ا ، ب و تكون الزاوية المقابلة هي الحرف الثالث للمثلث أى جـ) و إذا كان ا جـ الضلع الأصغر تكون ∠ ب هي الزاوية الصغرى



• أكبر زوايا المثلث فى القياس تقابل أكبر أضلاع المثلث طولاً و أصغر زاوية فى القياس تقابل أصغر أضلاع المثلث طولاً

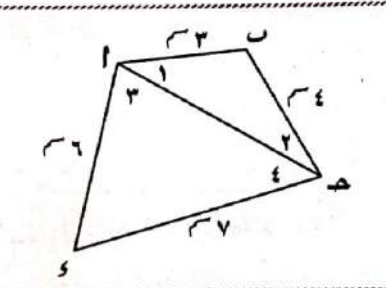
• نستخدم النظرية للمقارنة بين طولا ضلعين في مثلث واحد

أمثلة توضيحية

مثال ١ فى الشكل المقابل :

ا ب جـ د شكل رباعي فيه
ا ب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم ،
جـ د = ٧ سم ، د ا = ٦ سم

أثبت أن :
ق (∠ ب ا د) > ق (∠ ب جـ د)



الحل

المعطيات	ا ب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم ، جـ د = ٧ سم ، د ا = ٦ سم
المطلوب	ق (∠ ب ا د) > ق (∠ ب جـ د)
البرهان	فى △ ا ب جـ ∵ ب جـ > ا ب
	∴ ق(∠١) > ق(∠٢) (١)
	فى △ ا جـ د ∵ جـ د > ا د
	∴ ق(∠٣) > ق(∠٤) (٢)
	من (١)،(٢) بالجمع ∴ ق(∠١) + ق(∠٣) > ق(∠٢) + ق(∠٤)
	∴ ق (∠ ب ا د) > ق (∠ ب جـ د)

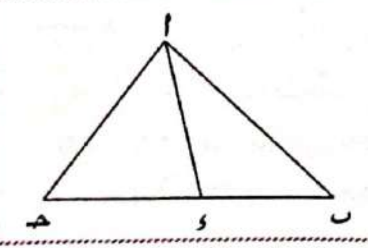
#



مثال ٢ فى الشكل المقابل :

ا ب جـ △ فيه
ا ب > ا جـ ، د ∈ ب جـ

أثبت أن :
ق (∠ ا د ب) > ق (∠ ب)



الحل



المعطيات اب > اجـ ، ء ∈ بجـ

المطلوب ق(∠اءب) > ق(∠ب)

البرهان فى Δ ابجـ ∵ اب > اجـ

∴ ق(∠جـ) > ق(∠ب) (١)

∵ ∠اءب خارجة عن Δ اءجـ

∴ ق(∠اءب) > ق(∠جـ) (٢)

من (١)،(٢) ∴ ق(∠اءب) > ق(∠ب) #

مثال ٣ فى الشكل المقابل :

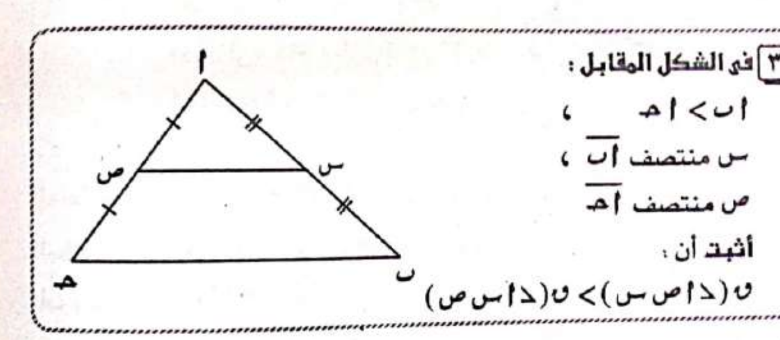
اب > اجـ ،

س منتصف اب ،

ص منتصف اجـ

أثبت أن :

ق(∠اص س) > ق(∠اس ص)



الحل

المعطيات اب > اجـ ، س منتصف اب ، ص منتصف اجـ

المطلوب ق(∠اص س) > ق(∠اس ص)

البرهان فى Δ ابجـ ∵ اب > اجـ

∴ ق(∠جـ) > ق(∠ب) (١)

∵ س منتصف اب ، ص منتصف اجـ

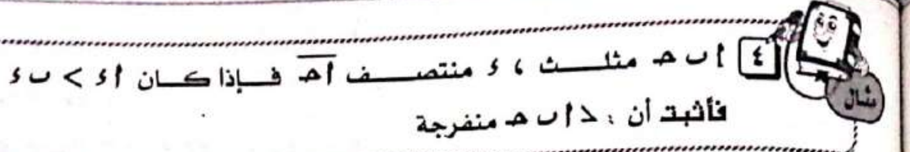
∴ س ص // بجـ

∴ ق(∠اس ص) = ق(∠ب) بالتناظر (٢)

∴ ق(∠اص س) = ق(∠جـ) بالتناظر (٣)

من (١)،(٢)،(٣) ∴ ق(∠اص س) > ق(∠اس ص) #





مثال ٤ ابجـ مثلث ، ء منتصف اجـ فإذا كان اء > بء

فأثبت أن : ∠ابجـ منفرجة

الحل

المعطيات ء منتصف اجـ ، اء > بء

المطلوب ∠ابجـ منفرجة

البرهان فى Δ ابء ∵ اء > بء

∴ ق(∠ابء) > ق(∠ا) (١)

∵ ء منتصف اجـ ∴ اء = ءجـ

∵ اء > بء ∴ ءجـ > بء

∴ ق(∠ءبجـ) > ق(∠جـ) (٢)

من (١) ، (٢) بالجمع

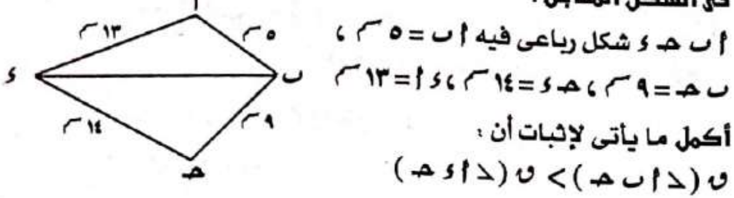
∴ ق(∠ابء) + ق(∠ءبجـ) > ق(∠ا) + ق(∠جـ)

∴ ق(∠ابجـ) > ق(∠ا) + ق(∠جـ)

∵ ق(∠ابجـ) + ق(∠ا) + ق(∠جـ) = ١٨٠°

∴ ∠ابجـ منفرجة

أمثلة للتدريب



تدريب (١)

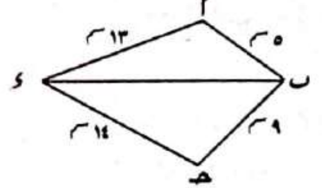
فى الشكل المقابل :

ابجـء شكل رباعى فيه اب = ٥ سم ،

بجـ = ٩ سم ، جـء = ١٤ سم ، ءا = ١٣ سم

أكمل ما يأتى لإثبات أن :

ق(∠ابجـ) > ق(∠اءجـ)





المعطيات	....
المطلوب	....
البرهان	∵ Δ ا ب د فيه ا د > ا ب
	∴ ق(∠ ا ب د) > ق(∠ ......) (١)
	∵ Δ حـ ب د فيه حـ د > ب حـ
	∴ ق(∠ ......) > ق(∠ ......) (٢)
	بجمع (١)، (٢) ينتج أن:
	∴ ق(∠ ا ب د) + ق(∠ .....) > ق(∠ .....) + ق(∠ .....)
	∴ ق(∠ ا ب حـ) > .... #

تدريب (٢)

في الشكل المقابل:
ا ب // حـ د ،
ا د ∩ ب حـ = {م} ،
م ب > م ا
أكمل ما يأتى لإثبات أن:
ق(∠ د) > ق(∠ حـ)

المعطيات	....
المطلوب	....
البرهان	∵ ا ب // حـ د ، ا د ، ب حـ قاطعين لهما
	∴ ق(∠ ا) = ق(∠ ......) بالتـ .... (١)
	∴ ق(∠ ب) = ق(∠ ......) بالتـ .... (٢)
	∵ م ب > م ا ∴ ق(∠ ......) > ق(∠ ......) (٣)
	من (١)، (٢)، (٣) ينتج أن:
	∴ ق(∠ ......) > ق(∠ ......)

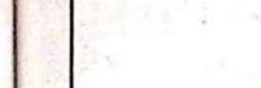




تمارين (٧) على المقارنة بين زوايا المثلث

أسئلة الوزارة





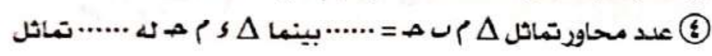
أولاً: راجع معنا واختبر نفسك

١٠ — ١/٣ ساعة امتحان ومراجعة — اختبار تراكمي (٦)

(١) (ا) في الشكل المقابل أكمل ما يأتي:

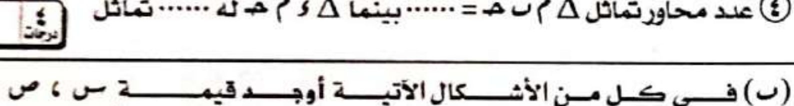
ا ب حـ د مستطيل، م نقطة تقاطع قطريه، هـ منتصف ب حـ ، ا هـ ∩ ب د = {و} ، ق(∠ ا حـ ب) = ٣٠° ، ا ب = ٩ سم ، ا هـ = ١٢ سم فإن:

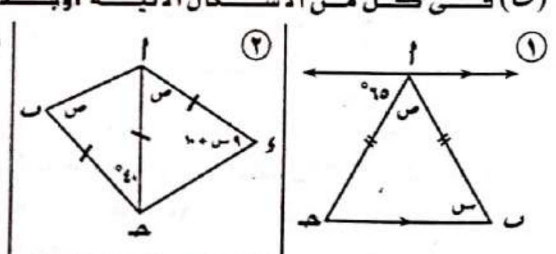
① ا حـ = ... سم ، ب م = ... سم
② و د = ... سم ، محيط Δ ا و م = ... سم
③ ق(∠ م ب حـ) = ...° ، ق(∠ ا م ب) = ...°
④ عدد محاور تماثل Δ م ب حـ = ... بينما Δ د م حـ له ...... تماثل

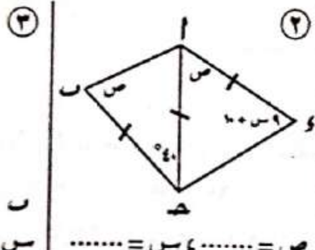


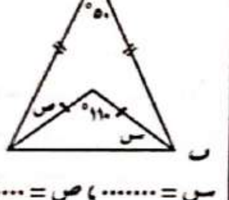
٤ درجات

(ب) في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة س ، ص :







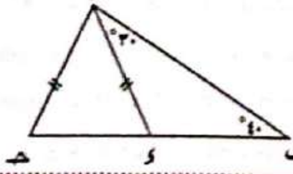


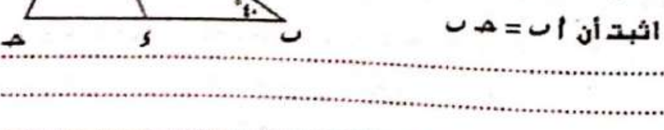
① س = ... ، ص = ...
② ص = ... ، س = ...
③ س = ... ، ص = ...

٣ درجات

(حـ) في الشكل المقابل:

ا د = ا حـ ، ق(∠ ب) = ٤٠° ،
ق(∠ ب ا د) = ٣٠°
اثبت أن ا ب = حـ ب





....
....
....



٣ درجات



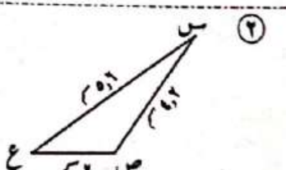
ثانياً : أجب عما يأتى :

مسائل المستوى الأول

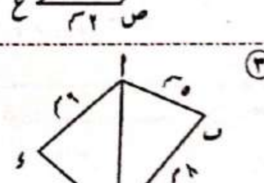
(٢) فى كل من الأشكال التالية أكمل باستخدام < أو > :

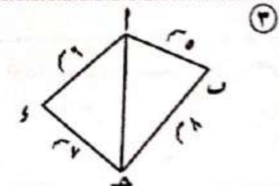
① ق(∠أ) ..... ق(∠ب)
ق(∠أ) ..... ق(∠جـ)
ق(∠ب) ..... ق(∠جـ)

② ق(∠ع) ..... ق(∠ص)
ق(∠س) ..... ق(∠ص)
ق(∠ع) ..... ق(∠س)



③ ق(∠ب أ جـ) ..... ق(∠ب جـ أ)
ق(∠د أ جـ) ..... ق(∠د جـ أ)
ق(∠ب أ د) ..... ق(∠ب جـ د)





(٣) رتب قياسات زوايا المثلث أ ب جـ فى كل من الحالتين الآتيتين ترتيباً تصاعدياً :

① إذا كان أ ب = ٧ سم ، ب جـ = ١٠ سم ، أ جـ = ٥ سم

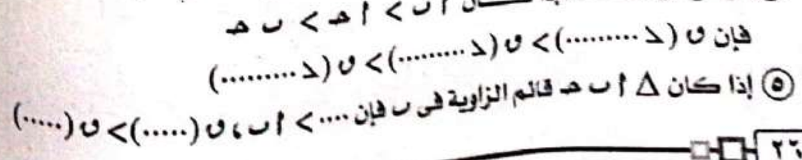
② إذا كان أ ب = ٥,٧ سم ، ب جـ = ٨,٥ سم ، أ جـ = ٦ سم

(٤) أكمل ما يأتى :

① إذا اختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول يقابله ....

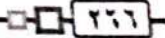
② أكبر زوايا المثلث فى القياس تقابل ..... طولاً وأصغر زاوية فى القياس تقابل ......

③ إذا كان س ص = ٣ سم ، ص ع = ٤ سم فى Δ س ص ع فإن ق(.....) > ق(.....)



④ فى أى مثلث إذا كان أ ب > أ جـ > ب جـ فإن ق(∠........) > ق(∠........) > ق(∠........)

⑤ إذا كان Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب فإن .... > أ ب ، ق(.....) > ق(.....)





(٥) اختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس :

① فى Δ س ص ع إذا كان س ع > ص ع فإن ق(∠س) .... ق(∠ص)
[< أو > أو = أو ≡]

② فى Δ أ ب جـ إذا كان أ ب > أ جـ ، ق(∠ب) = ٤٠° فإن ق(∠جـ) ..... ٤٠°
[< أو > أو = أو ≥]

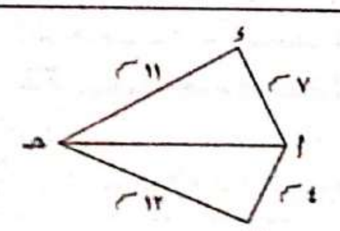
③ إذا كان أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم ، جـ أ = ٥ سم فإن ....
[ق(∠ب) > ق(∠أ) أو ق(∠أ) > ق(∠ب) أو
ق(∠جـ) > ق(∠أ) أو ق(∠أ) = ق(∠جـ)]

④ إذا كان Δ س ص ع منفرج الزاوية فى س ، $\overline{سد}$ ⊥ $\overline{صع}$ فإن ق(∠ص) ..... ق(∠ص د س)
[< أو > أو = أو ≡]

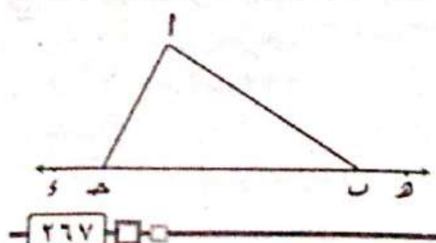
مسائل المستوى الثانى

(٦) فى الشكل المقابل :
أ ب جـ Δ فيه أ ب = ٧ سم ،
أ جـ = ٥ سم ، ب جـ = ١٠ سم
رتب قياسات زوايا المثلث ترتيباً تصاعدياً ثم تنازلياً

(٧) فى الشكل المقابل :
أ ب جـ د شكل رباعي فيه
أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ١٢ سم ،
جـ د = ١١ سم ، د أ = ٧ سم
أثبت أن : ق(∠ب أ د) > ق(∠ب جـ د)

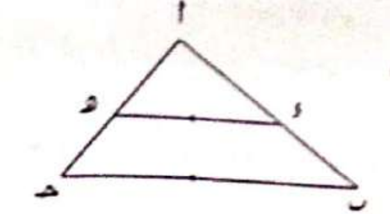


(٨) فى الشكل المقابل :
أ ب > أ جـ ،
هـ ، د ∈ $\overleftrightarrow{بجـ}$
أثبت أن : ق(∠أ ب هـ) > ق(∠أ جـ د)









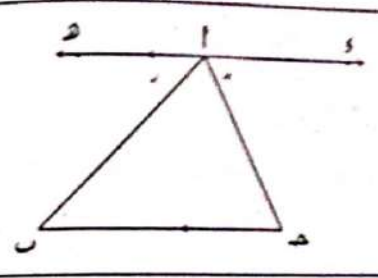
(٩) فى الشكل المقابل :

ا ب جـ ∆ فيه ا ب > ا جـ ، ء ∈ ا ب ،

هـ ∈ ا جـ ، ء هـ // ب جـ

أثبت أن :

ق (∠ ا هـ ء) > ق (∠ ا ء هـ)



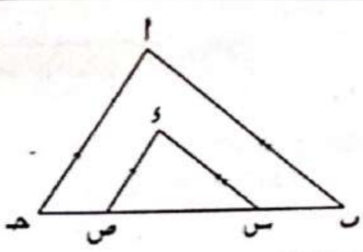
(١٠) فى الشكل المقابل :

ا ب جـ ∆ فيه ا ب > ا جـ ،

رسم ء هـ // جـ ب ويمر بنقطة ا

أثبت أن :

ق (∠ ء ا جـ) > ق (∠ هـ ا ب)



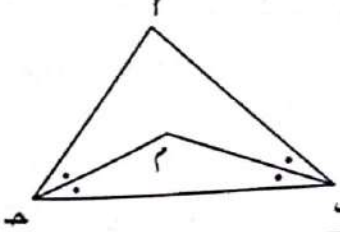
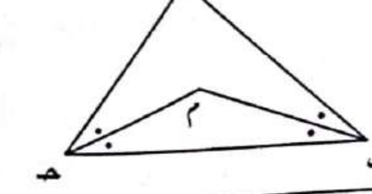
(١١) فى الشكل المقابل :

ا ب جـ ∆ فيه ا ب > ا جـ ،

ء س // ا ب ، ء ص // ا جـ

أثبت أن :

ق (∠ ء ص س) > ق (∠ ء س ص)

(١٢) فى الشكل المقابل :

ا ب جـ مثلث ، ب م ينصف ∠ ا ب جـ

جـ م ينصف ∠ ا جـ ب فإذا كان ا ب > ا جـ

أثبت أن :

ق (∠ م جـ ب) > ق (∠ م ب جـ)

---

(١٣) فى الشكل المقابل :

ا ب ء جـ شكل رباعي فيه

ء ب = ء جـ ، ا ب > ا جـ

أثبت أن :

ق (∠ ا جـ ء) > ق (∠ ا ب ء)



(١٤) فى الشكل المقابل :

ا ب جـ ∆ فيه ا ب = ا جـ ،

ء نقطة داخل المثلث بحيث ء ب > ء جـ

أثبت أن :

ق (∠ ء ب ا) > ق (∠ ء جـ ا)

---

(١٥) ا ب جـ ∆ فيه ا ب > ا جـ ، ا ء ⊥ ب جـ بحيث ا ء ∩ ب جـ = {ء}

أثبت أن ق (∠ ب ا ء) > ق (∠ جـ ا ء)

---

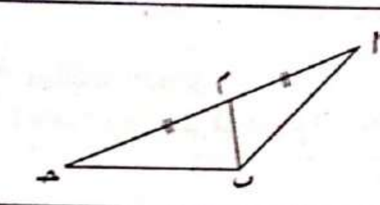
(١٦) ا ب جـ ∆ فيه ء ∈ ب جـ بحيث ب ء > ء جـ ، ا ء > ب ء

أثبت أن ق (∠ ب) + ق (∠ جـ) > ق (∠ ب ا جـ)

---

(١٧) ا ب جـ ء شكل رباعي فيه ب جـ أكبر الأضلاع طولاً ، ا ء أصغرها طولاً

أثبت أن ق (∠ ا) > ق (∠ جـ)



(١٨) فى الشكل المقابل :

ب م متوسط فى ∆ ا ب جـ

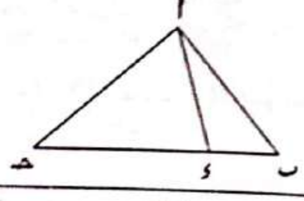
ب م < ا م

أثبت أن ∠ ا ب جـ منفرجة

---

(١٩) هـ و م ∆ فيه هـ ء ينصف ∠ هـ ويقطع و م فى ء فإذا كان هـ و > هـ م

أثبت أن ∠ هـ ء و منفرجة

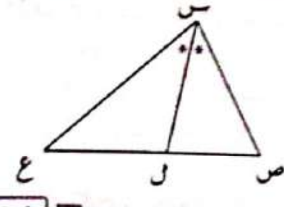


(٢٠) فى الشكل المقابل :

ا ب جـ ∆ فيه

ا جـ > ا ب ، ء ∈ ب جـ

أثبت أن : ق (∠ ا ء جـ) > ق (∠ جـ)



(٢١) فى الشكل المقابل :

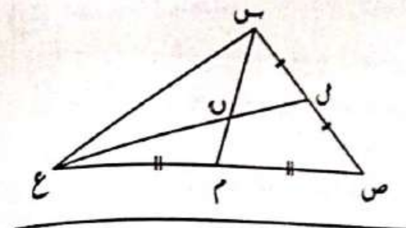
س ص ع ∆ فيه س ع > س ص ،

س ل ينصف ∠ س ويقطع ص ع فى ل

أثبت أن : ∠ س ل ص حادة



(22) في الشكل المقابل:

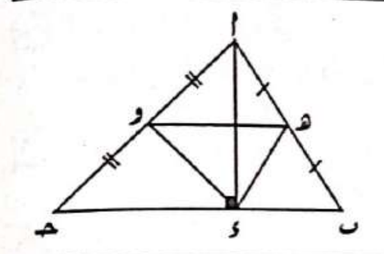


س ص ع △ فيه المتوسطان $\overline{سم}$ ، $\overline{عل}$ متقاطعان في ن ، ن ل > ن م

أثبت أن:

ق(∠ن س ع) > ق(∠ن ع س)

(23) في الشكل المقابل:



أ ب جـ △ فيه أ جـ > أ ب ،

$\overline{أد} \perp \overline{بجـ}$ تقطعها في د ،

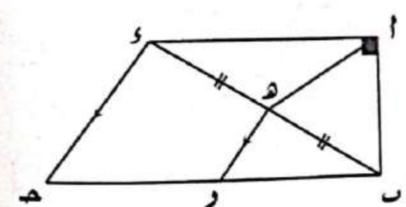
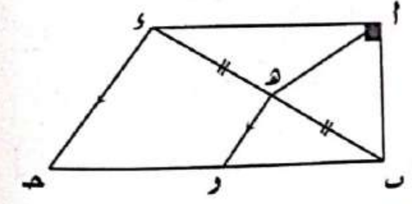
هـ منتصف $\overline{أب}$ ، و منتصف $\overline{أجـ}$

أثبت أن: ق(∠د هـ و) > ق(∠د و هـ)

(24) أ ب جـ د مستطيل ، هـ ∈ $\overline{أد}$ بحيث هـ جـ > هـ ب

أثبت أن ق(∠هـ جـ د) > ق(∠هـ ب أ)

(25) في الشكل المقابل:

أ ب جـ د شكل رباعي فيه ق(∠أ) = 90° ،

هـ منتصف $\overline{بد}$ ، $\overleftrightarrow{هو} \parallel \overline{دجـ}$

ويقطع $\overline{بجـ}$ في و ، أ هـ > هـ و

أثبت أن: ق(∠جـ) > ق(∠د ب جـ)

مسائل المتفوقين

(26) أ ب جـ △ فيه $\overline{أد}$ متوسط فإذا كان أ د = 3 سم ، ب جـ = 4 سم

فأثبت أن: ∠أ حادة

(27) أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه أ جـ > ب د أثبت أن ∠ب منفرجة

(28) أ ب جـ د شكل رباعي فيه $\overline{دجـ} \parallel \overline{أب}$ ، ق(∠جـ) > ق(∠أ)

أثبت أن: ق(∠أ د ب) > ق(∠د ب جـ)



المقارنة بين أطوال الأضلاع في المثلث

نظرية

إذا اختلف قياسا زاويتين في مثلث فأكبرهما في القياس يقابلها ضلع أكبر في الطول من الذي يقابل الأخرى

المعطيات: △ أ ب جـ فيه ق(∠جـ) > ق(∠ب)

المطلوب: إثبات أن أ ب > أ جـ

البرهان: ∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطع مستقيمة

∴ يجب أن تتحقق إحدى الحالات التالية:

(1) أ ب < أ جـ (2) أ ب = أ جـ (3) أ ب > أ جـ

إذا لم تكن أ ب > أ جـ

فإما أ ب = أ جـ أو أ ب < أ جـ

إذا كان أ ب = أ جـ فإن ق(∠جـ) = ق(∠ب)

وهذا يخالف المعطيات حيث أن ق(∠جـ) > ق(∠ب)

وإذا كان أ ب < أ جـ فإن ق(∠جـ) < ق(∠ب) حسب النظرية السابقة

وهذا يخالف المعطيات حيث أن ق(∠جـ) > ق(∠ب)

∴ يجب أن يكون أ ب > أ جـ

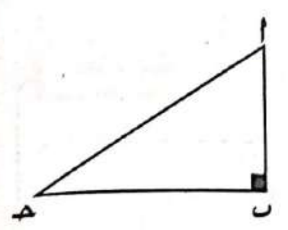
#

ملاحظة

• تستخدم النظرية للمقارنة بين قياسي زاويتين في مثلث واحد

نتيـجة

فـى المثلـث القائـم الزاويـة يكـون الوتـر هـو أطـول أضـلاع المثلـث



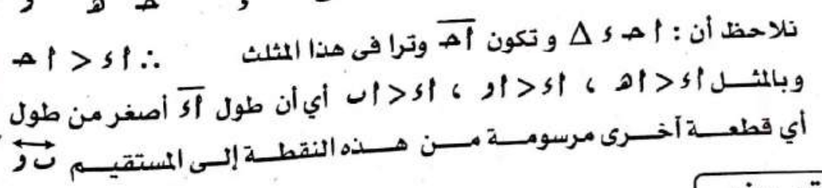
فمثلاً : فى Δ ا ب جـ القائم الزاوية فى ب تكون زاوية ب لها أكبر قياس لأنها قائمة ، ∠ا ، ∠ب حادتين أي أن ق (∠ب) > ق (∠جـ) ، ق (∠ب) > ق (∠ا) وبالتالي يكون أكبر ضلع هو اجـ وهو المقابل للزاوية القائمة أي أن ا جـ > ب جـ ، ا جـ > ا ب

ملاحظة

- فى المثلث المنفرج الزاوية يكون الضلع المقابل للزاوية المنفرجة هو أطول أضلاع المثلث

نتيـجة

طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من نقطة خارج مستقيم معلوم إلي هذا المستقيم أصغر من طول أي قطعة مستقيمة مرسومة من هذه النقطة إلى المستقيم المعلوم



فمثلاً : إذا كانت ا نقطة خارج المستقيم ب جـ ورسمنا القطعة المستقيمة اء عمودية على ب جـ ورسمنا قطع مستقيمة أخرى مثل اب ، اجـ ، اهـ ، او

نلاحظ أن : ا جـ ء Δ وتكون اجـ وترا فى هذا المثلث ∴ ا ء < ا جـ

وبالمثل اء < اهـ ، اء < او ، اء < اب أي أن طول اء أصغر من طول أي قطعة آخرى مرسومة من هذه النقطة إلى المستقيم ب و

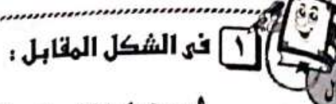
تعـريف

بُعد أي نقطة عن مستقيم معلوم هو طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة إلي المستقيم المعلوم

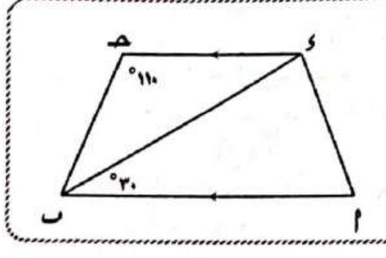
فمثلاً : بُعد النقطة ا عن المستقيم ب جـ فى الشكل السابق هو طول اء



أمثلة توضيحية



١ فى الشكل المقابل :



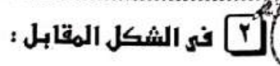
ا ب جـ ء شكل رباعي فيه اب // ءجـ ، ق (∠ا ب ء) = ٣٠° ، ق (∠جـ) = ١١٠°

أثبت أن : ء جـ > جـ ب

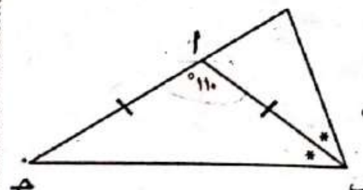
الحل

المعطيات	اب // ءجـ ، ق (∠ا ب ء) = ٣٠° ، ق (∠جـ) = ١١٠°
المطلوب	ء جـ > جـ ب
البرهان	∵ اب // ءجـ ، ء ب قاطع لهما ، ق (∠ا ب ء) = ٣٠°
	∴ ق (∠جـ ء ب) = ق (∠ء ب ا) = ٣٠° بالتبادل
	∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°
	∴ ق (∠جـ ب ء) = ١٨٠° - (١١٠° + ٣٠°) = ٤٠°
	∴ ق (∠جـ ب ء) > ق (∠جـ ء ب)
	∴ جـ ء > جـ ب

#



٢ فى الشكل المقابل :



ا ب = ا جـ ، ب ا ينصف ∠ء ب جـ ويقطع ءجـ فى ا ، ق (∠ب ا جـ) = ١١٠°

أثبت أن : ا جـ > ء ب

الحل

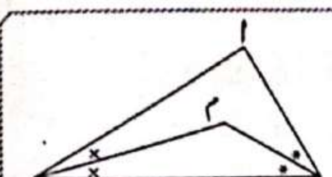
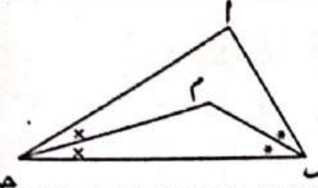
المعطيات	ا ب = ا جـ ، ب ا ينصف ∠ء ب جـ ، ق (∠ب ا جـ) = ١١٠°
المطلوب	ا جـ > ء ب





البرهان | في Δ ا ب جـ :
∵ ا ب = ا جـ ، ق(∠ب ا جـ) = ١١٠°
∴ ق(∠ا ب جـ) = ق(∠ا جـ ب) = (١٨٠° − ١١٠°) ÷ ٢ = ٧٠° ÷ ٢ = ٣٥°
∵ ب ا ينصف ∠د ب جـ
∴ ق(∠د ب ا) = ق(∠ا ب جـ) = ٣٥°
∵ ا ∈ د جـ
∴ ق(∠د ا ب) = ١٨٠° − ١١٠° = ٧٠° (١)
في Δ ا ب د :
ق(∠د) = ١٨٠° − (٣٥° + ٧٠°) = ٧٥° (٢)
من (١) ، (٢) ينتج أن : ق(∠د) > ق(∠د ا ب)
∴ ا ب > د ب
∵ ا ب = ا جـ ∴ ا جـ > د ب
#

مثال [٣] في الشكل المقابل :
ا ب جـ Δ فيه ا جـ > ا ب ، ب م ينصف ∠ا ب جـ ، جـ م ينصف ∠ا جـ ب
اثبت أن : م جـ > م ب

الحل

المعطيات | ا جـ > ا ب ، ب م ينصف ∠ا ب جـ ، جـ م ينصف ∠ا جـ ب
المطلوب | م جـ > م ب
البرهان | ∵ ا جـ > ا ب
∴ ق(∠ا ب جـ) > ق(∠ا جـ ب)
∵ ب م ينصف ∠ا ب جـ ، جـ م ينصف ∠ا جـ ب
∴ ½ ق(∠ا ب جـ) > ½ ق(∠ا جـ ب) (١)
∵ ق(∠م ب جـ) = ½ ق(∠ا ب جـ) (٢)
∵ ق(∠م جـ ب) = ½ ق(∠ا جـ ب) (٣)
من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن :
∴ ق(∠م ب جـ) > ق(∠م جـ ب)
∴ م جـ > م ب
#

أمثلة للتدريب

تدريب (١)

في الشكل المقابل :
ا ب جـ Δ ، هـ ∈ ب ا ،
ا د // ب جـ ،
ق(∠جـ ا د) = ٣٥° ،
ق(∠د ا هـ) = ٧٥°

أكمل البرهان الآتي لإثبات أن ا جـ > ا ب

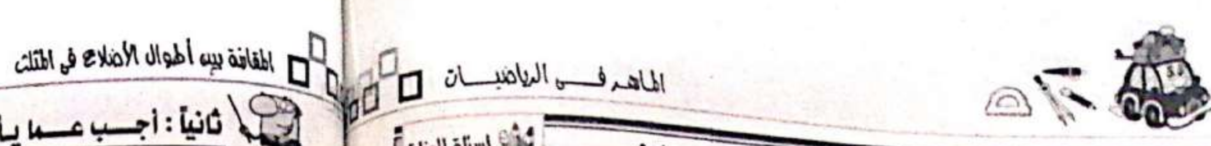
∵ ا د // ب جـ ، ا ب ، ا جـ قاطعان لهما
∴ ق(∠ا جـ ب) = ق(∠.......) = ...° بال ....
، ق(∠ب) = ق(∠.......) = ...° بال ....
في Δ ا ب جـ ∵ ق(∠ا ب جـ) = ...° ، ق(∠ا جـ ب) = ٣٥°
∴ ق(∠.......) > ق(∠.......) ∴ ا جـ > ....

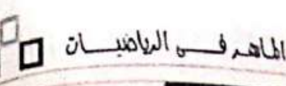
تدريب (٢)

في الشكل المقابل :
ا ب د جـ شكل رباعي فيه
ق(∠ا ب جـ) = ق(∠ب د جـ) = ٩٠°

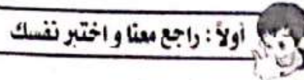
أكمل ما يأتي لإثبات أن ا جـ > د جـ

المعطيات | ....
المطلوب | ....
البرهان | في Δ ا ب جـ ∵ ق(∠ا ب جـ) = ٩٠°
∴ .... > ب جـ (١)
في Δ ب د جـ ∵ ق(∠د) = ٩٠°
∴ .... > د جـ (٢)
من (١) ، (٢) ∴ .... > ....

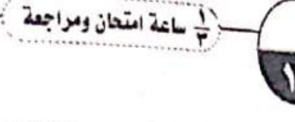




تمارين (٨) على المقارنة بين أطوال الأضلاع فى المثلث







$\frac{1}{3}$ ساعة امتحان ومراجعة

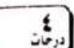
(١) (أ) أكمل ما يأتى :

① منصف زاوية الرأس فى Δ متساوى الساقين يكون .... ، ....

② إذا كان قياس زاوية خارجة لمثلث متساوى الساقين يساوى °١٢٠ فإن المثلث ....

③ محور تماثل القطعة المستقيمة هو ....

④ فى Δ أ ب جـ إذا كان ق (∠أ) = °٣٠ ، ق (∠ب) = °٩٠ فإن أ جـ = ... ب جـ



(ب) فى الشكل المقابل :

أ ب = أ جـ ، ء ∈ $\overrightarrow{أب}$ ، هـ ∈ $\overrightarrow{أجـ}$ ،

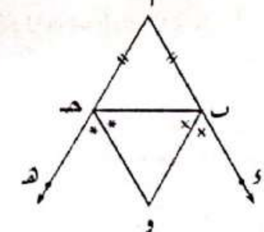
$\overrightarrow{بو}$ ينصف ∠ ء ب جـ ،

$\overrightarrow{جـو}$ ينصف ∠ ب جـ هـ



اثبت أن : ① Δ ب و جـ متساوى الساقين

② $\overleftrightarrow{أو}$ محور تماثل $\overline{بجـ}$



....

....

....

....

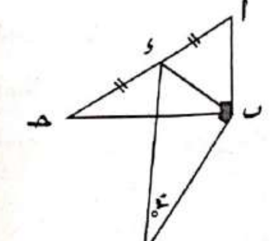
٣ درجات

(جـ) فى الشكل المقابل :

ق (∠أ ب جـ) = ق (∠ء ب هـ) = °٩٠

ء منتصف $\overline{أجـ}$ ، ق (∠هـ) = °٣٠

اثبت أن : أ جـ = ء هـ



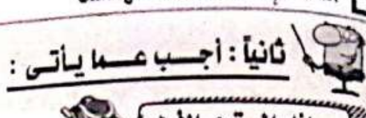
....

....

....

....

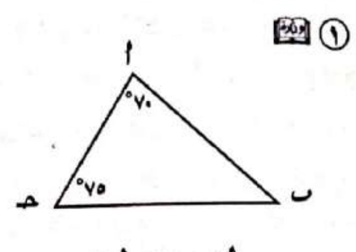
٣ درجات



مسائل المستوى الأول

(٢) فى كل من الأشكال الآتية أكمل باستخدام < أو > :

①

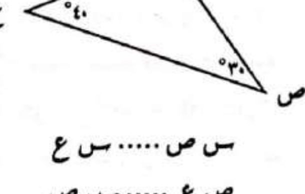


أ ب ...... أ جـ

أ ب ...... ب جـ

أ جـ ...... ب جـ

②

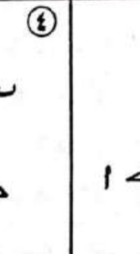


س ص ...... س ع

ص ع ...... س ص

ص ع ...... س ع

③



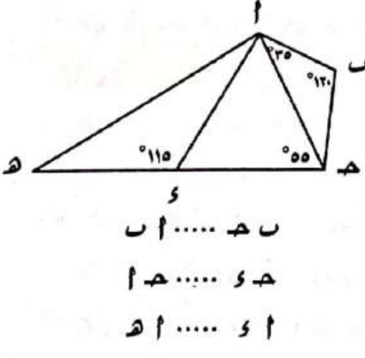
أ جـ ...... ب جـ

ب جـ ...... ء ب

أ جـ ...... ب ء

جـ أ ...... ء جـ

④



ب جـ ...... أ ب

جـ ء ...... جـ أ

أ ء ...... أ هـ

جـ ء ...... أ ء

(٣) Δ س ص ع فيه ق (∠س) = °٤٠ ، ق (∠ص) = °٨٠ ، ق (∠ع) = °٦٠

رتب أطوال أضلاع المثلث تصاعدياً

(٤) أ ب جـ مثلث فيه ق (∠أ) = °٤٥ ، ق (∠ب) = °٧٥ ، ق (∠جـ) = °٦٠

رتب أطوال أضلاع المثلث أ ب جـ تنازلياً



⑤ أكمل ما يأتي :

(١) في Δ أ ب جـ إذا كان ق(∠أ) = ٥٠°، ق(∠ب) = ٧٠° فإن أ ب > ....

(٢) في Δ القائم الزاوية أكبر الأضلاع طولاً هو ....

(٣) إذا كان Δ أ ب جـ منفرج الزاوية في أ فإن أكبر أضلاعه طولاً هو ....

(٤) إذا اختلف قياسا زاويتين في مثلث فأكبرهما في القياس ....

(٥) إذا كان Δ س ص ع فيه س ص = ٧ سم ، ص ع = ٦ سم ، س ع = ٥ سم
فإن أصغر زوايا Δ الداخلة في القياس هي ....

(٦) أقصر بعد بين المستقيم وأي نقطة خارجه عنه هو ....

(٧) في Δ أ ب جـ إذا كان ق(∠جـ) > ق(∠ب) فإن .... > ....

(٨) أصغر زوايا المثلث قياساً يقابلها ....

(٩) في Δ أ ب جـ إذا كان ق(∠أ) = ١٠٠° فإن أكبر الأضلاع طولاً هو ....

⑥ اختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس :

(١) في Δ أ ب جـ إذا كان ق(∠ب) = ٩٠° فإن أ ب .... أ جـ
[< أو > أو = أو ≤]

(٢) في Δ أ ب جـ إذا كان أ ب = أ جـ ، ق(∠ب أ جـ) = ٥٠° فإن ....
[ب جـ > أ ب أو ب جـ = أ ب أو ب جـ < أ ب أو ب جـ ⊥ أ ب]

(٣) الوتر في المثلث القائم الزاوية .... أضلاعه طولاً
[أكبر أو أصغر أو يساوي أحد أو أكبر من أو يساوي أحد]

(٤) في Δ س ص ع إذا كان ق(∠س) > ق(∠ص) فإن س ع .... ص ع
[< أو > أو = أو ≡]

(٥) في Δ أ ب جـ إذا كان أ ب = أ جـ، ق(∠ب) = ٣٠° فإن ب جـ .... أ جـ
[< أو > أو = أو ≡]

(٦) إذا كان أ ب جـ Δ فيه ق(∠أ) = ٦٠°، ق(∠ب) = ٣٠° فإن أصغر الأضلاع طولاً هو ....
[أ ب أو ب جـ أو جـ أ أو غير ذلك]

(٧) في Δ أ ب جـ إذا كان ق(∠أ) = ق(∠ب) + ق(∠جـ) فإن أكبر الأضلاع طولاً ....
[أ ب أو ب جـ أو جـ أ أو غير ذلك]



⑦ في الشكل المقابل :

ق(∠أ) = ٧٠° ، ق(∠ب) = ٥٠° ، ق(∠جـ) = ٦٠°

رتب أضلاع المثلث تصاعدياً وتنازلياً حسب أطوالهم

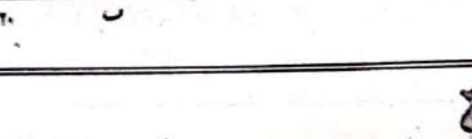
⑧ في الشكل المقابل :

أ ب جـ Δ، د ∈ أ جـ ، هـ ∈ جـ ب ،

ق(∠أ ب هـ) = ١٠٠°، ق(∠ب جـ د) = ١٢٠°

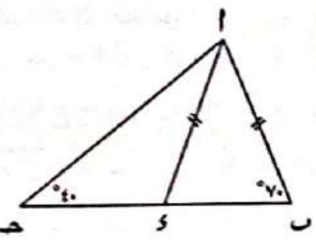
أثبت أن : أ جـ > أ ب

هام



مسائل المستوى الثاني

⑨ في الشكل المقابل :



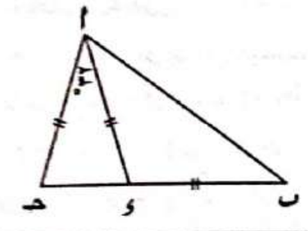
أ ب جـ Δ فيه

ق(∠ب) = ٧٠°، ق(∠جـ) = ٤٠° ،

د ∈ ب جـ بحيث أ ب = أ د

أثبت أن : أ جـ > أ د

⑩ في الشكل المقابل :



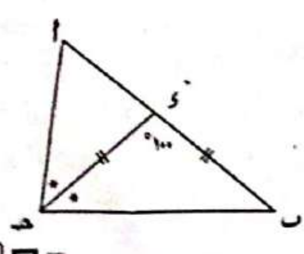
أ ب جـ Δ، د ∈ ب جـ

بحيث أ د = أ جـ = ب د ،

ق(∠د أ جـ) = ٣٢°

أثبت أن : أ ب > ب جـ

⑪ في الشكل المقابل :



أ ب جـ مثلث ، جـ د ينصف ∠جـ

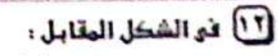
ويقطع أ ب في د ، د ب = د جـ ،

ق(∠ب د جـ) = ١٠٠°

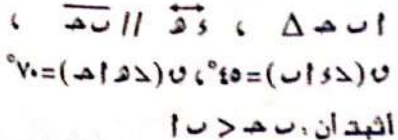
أثبت أن : أ جـ > د ب







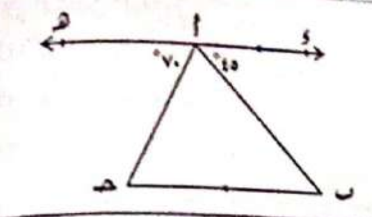
(١٢) في الشكل المقابل :



ا ب جـ Δ ، ء هـ ↔ // ب جـ ،

ق(∠ء ا ب) = ٤٥° ، ق(∠هـ ا جـ) = ٧٠°

أثبت أن : ب جـ < ب ا



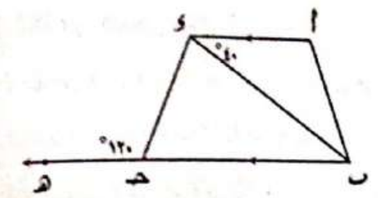
(١٣) في الشكل المقابل :

ا ب جـ ء شكل رباعي فيه

ا ء // ب جـ ، هـ ∈ ب جـ ← ،

ق(∠ا ء ب) = ٤٠° ، ق(∠ء جـ هـ) = ١٢٠°

أثبت أن : ء ب > ء هـ



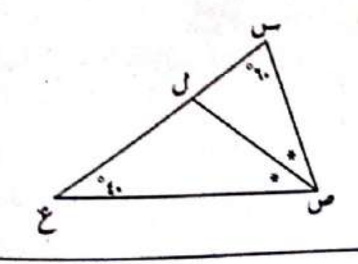
(١٤) في الشكل المقابل :

س ص ع Δ فيه ق(∠س) = ٦٠° ،

ق(∠ع) = ٤٠° ، ل ∈ س ع بحيث

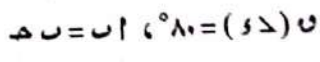
ص ل ← ينصف ∠س ص ع

أثبت أن : ل ع > ل س

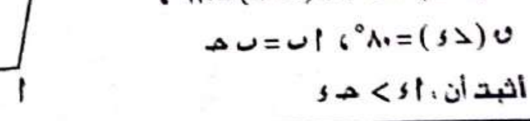


(١٥) في الشكل المقابل :

ا ب جـ ء شكل رباعي فيه

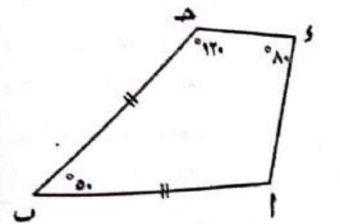


ق(∠ب) = ٥٠° ، ق(∠جـ) = ١٢٠° ،



ق(∠ء) = ٨٠° ، ا ب = ب جـ

أثبت أن : ا ء > جـ ء



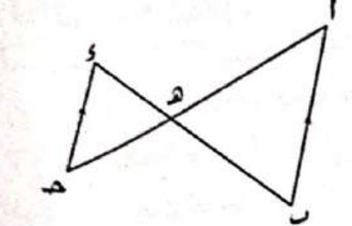
(١٦) في الشكل المقابل :

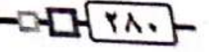
ا ب // ء جـ ،

ا جـ ∩ ب ء = {هـ} ،

ا هـ > هـ ب

أثبت أن : هـ جـ > هـ ء





(١٧) في الشكل المقابل :

ا جـ ∩ ء هـ = {ب} ،

ق(∠ا) = ق(∠جـ) = ٩٠°

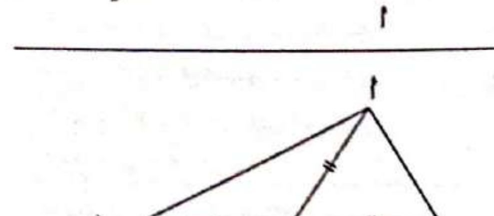
أثبت أن : هـ ء > ا جـ

(١٨) في الشكل المقابل :

ا ب جـ مثلث ،

ء ∈ ب جـ حيث ب ء = ا ء

أثبت أن : ب جـ > ا جـ



(١٩) ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، ء ∈ ا جـ ، هـ ∈ ب جـ بحيث ا ء = ب هـ

أثبت أن ق(∠جـ هـ ء) > ق(∠جـ ء هـ)

(٢٠) في الشكل المقابل :

ا ب جـ Δ فيه

جـ ا = جـ ب ،

ء ∈ ا جـ

أثبت أن : ء ب > ء ا

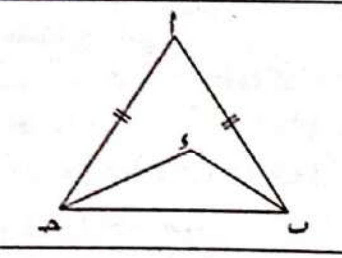
(٢١) في الشكل المقابل :

ا ب جـ مثلث فيه

ا ب = ا جـ ، ء نقطة داخلة بحيث

ق(∠ا ب ء) < ق(∠ا جـ ء)

أثبت أن : ء جـ > ء ب



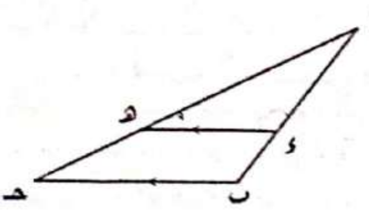
(٢٢) في الشكل المقابل :

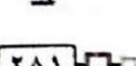
ا ب جـ مثلث

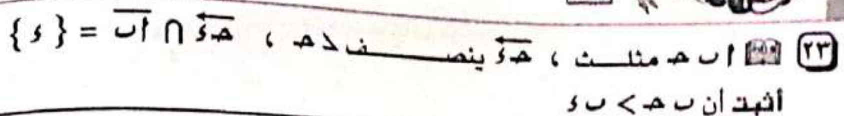
منفرج الزاوية في ب .

ء هـ // ب جـ

أثبت أن : ا هـ > ا ء

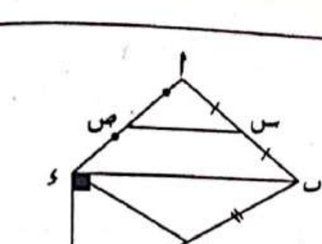


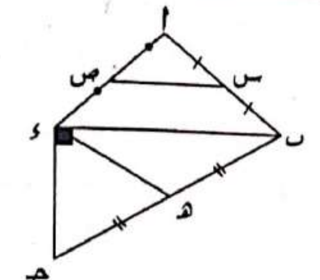




٢٣) ا ب حـ مثلث ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ينصف ∠ حـ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}} \cap \overline{\text{ا ب}} = \{\text{ء}\}$

أثبت أن ب حـ > ب ء





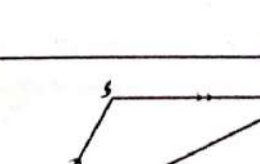
٢٤) فى الشكل المقابل :

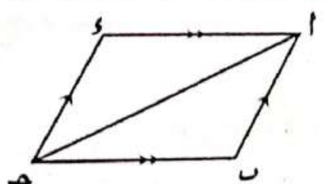
ا ب حـ ء شكل رباعي فيه س ، ص ، هـ منتصفات $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ا ء}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ على الترتيب

ق (∠ ب ء حـ) = ٩٠°

أثبت أن : ء هـ > س ص

٢٥) ا ب حـ مثلث فيه ا ب = ا حـ ، س ∈ $\overline{\text{ا حـ}}$ رسم $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ يقطع $\overline{\text{ا ب}}$ فى ص ويقطع $\overleftrightarrow{\text{حـ ب}}$ فى ع أثبت أن : ا ص > ا س





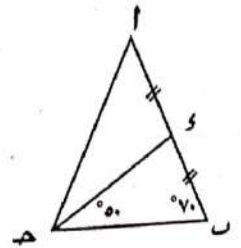
٢٦) فى الشكل المقابل :

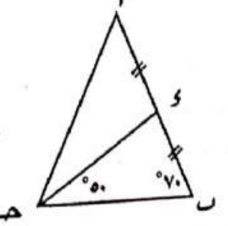
ا ب حـ ء متوازي أضلاع فيه

ق (∠ ء حـ ا) > ق (∠ ا حـ ب)

أثبت أن : ا ء > ا ب

مسائل المتفوقين





٢٧) فى الشكل المقابل :

ء منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ ، ق (∠ ب) = ٧٠° ،

ق (∠ ء حـ ب) = ٥٠°

اثبت أن ① ق (∠ ا) > ق (∠ ا حـ ء)

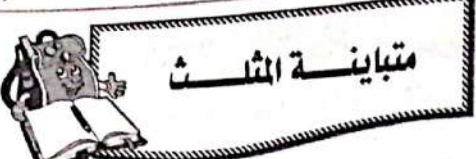
② ∠ ا حـ ب حادة

٢٨) ا ب حـ △ فيه ق (∠ ا) = ٢ س - ١ ، ق (∠ ب) = ٣ س - ٢ ، ق (∠ حـ) = ٥ س + ٣ حيث جميع القياسات بالدرجات فأثبت أن : ا حـ > ب حـ

٢٩) ا ب حـ △ قائم الزاوية فى ب ، ء ∈ $\overline{\text{ا ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ا حـ}}$ ، و منتصف $\overline{\text{ء حـ}}$

اثبت أن : ① ب هـ > ب و ② ب هـ > حـ و





حقيقة

فى أى مثلث يكون مجموع طولى أى ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث

ففى △ ا ب حـ يكون :

ا ب + ا حـ > ب حـ

ا حـ + ب حـ > ا ب

ا ب + ب حـ > ا حـ

ا حـ > ب حـ - ا ب

أى أن ا ب + ب حـ > ا حـ > ب حـ - ا ب

مثال ١) أى من هذه الأعداد يصلح أطوالاً لأضلاع مثلث

① ٢ ، ٧ ، ٤ ② ٥ ، ٨ ، ٣ ③ ٣ ، ٦ ، ٨ ④ ٥ ، ٥ ، ٥

الحل

لمعرفة الأعداد التى تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث نجمع طولى أصغر ضلعين وإذا كان مجموعهما أكبر من طول الضلع الثالث فإن الأعداد تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث وإذا كانت أصغر من أو تساوى طول الضلع الثالث ففى هذه الحالة لا تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث

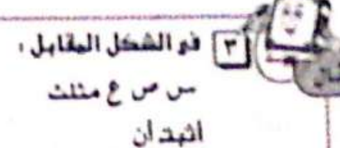
① ٢ ، ٧ ، ٤ لا تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث (لأن ٢ + ٤ > ٧)

② ٥ ، ٨ ، ٣ لا تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث (لأن ٥ + ٣ = ٨)

③ ٣ ، ٦ ، ٨ تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث

④ ٥ ، ٥ ، ٥ تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث متساوى الأضلاع





٢ في المثلث أ ب جـ إذا كان أب = ١٠ سم ، ب جـ = ٨ سم

فأوجد الفترة التي ينتمي إليها طول الضلع الثالثة

الحل

∵ أجـ < أب + ب جـ ∴ أجـ < ١٠ + ٨ أي أن **أجـ < ١٨**

∵ أجـ > أب − ب جـ ∴ أجـ > ١٠ − ٨ أي أن **أجـ > ٢**

∴ الفترة التي ينتمي إليها طول الضلع الثالث هي]٢ ، ١٨[

أي أن أجـ ∈]٢ ، ١٨[

٣ في الشكل المقابل :

س ص ع مثلث

اثبت أن

محيط △ س ص ع > ٢ س ص

الحل

المعطيات س ص ع مثلث

المطلوب محيط △ س ص ع > ٢ س ص

البرهان من متباينة المثلث س ع + ع ص > س ص

بإضافة س ص إلى كل من الطرفين

∴ س ع + ع ص + س ص > س ص + س ص

∴ س ع + ع ص + س ص > ٢ س ص

∴ محيط △ س ص ع > ٢ س ص

#

أمثلة للتدريب

تدريب (١)

أكمل لمعرفة أي الأعداد الآتية تصلح أطوال أضلاع مثلث :

① ٣ ، ٨ ، ٦

أصغر عددين ..... + ... = ... أكبر عدد .....

∴ الأعداد .... أطوال أضلاع مثلث

② ٤ ، ٤ ، ٤

....

....

....

∴ الأعداد .... أطوال أضلاع مثلث





تمارين (٩) على متباينة المثلث

أسئلة الوزارة

أولاً : راجع معنا واختبر نفسك

١/٢ ساعة امتحان ومراجعة

١٠

النشاط الذاتي (٨)

١ (أ) أكمل ما يأتي :

① $\overline{أد}$ متوسط في △ أ ب جـ ، م نقطة تقاطع متوسطاته ، أ م = ٦ سم

فإن أ د = ... سم

② إذا كان قياس إحدى زوايا △ متساوي الساقين ١٠٠°

فإن قياس إحدى الزاويتين الأخريين = ...

③ أ ب جـ مثلثاً فيه ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ ب) = ٨٠°

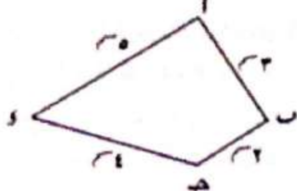
فإن عدد محاور التماثل له = ...

④ متوسط المثلث المتساوي الساقين المرسوم من الرأس ينصف ....

ويكون عمودياً على ....

٤ درجات

(ب) في الشكل المقابل :



أ ب جـ د شكل رباعي فيه أ ب = ٣ سم

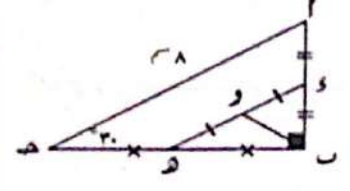
ب جـ = ٢ سم ، جـ د = ٤ سم ، د أ = ٥ سم

اثبت أن ق (∠ أ ب جـ) > ق (∠ أ د جـ)

....

٣ درجات

(جـ) في الشكل المقابل :



أ ب جـ مثلث فيه ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠° ،

ق (∠ جـ) = ٣٠° ، د ، هـ ، و منتصفات

$\overline{أب}$ ، $\overline{بجـ}$ ، $\overline{دهـ}$ ، أ جـ = ٨ سم

أوجد محيط △ د ب و

....

٣ درجات



ثانياً : أجب عما يأتي :

مسائل المستوى الأول

(٢) أكمل ما يأتي :

① في أي مثلث يكون مجموع طولي أي ضلعين ....

② في △ أ ب جـ يكون أ ب + ب جـ .... أ جـ

③ إذا كان ٤ سم ، ٩ سم طولا ضلعين في مثلث فإن أصغر عدد صحيح يمثل طول الضلع الثالث = ...

④ إذا كان ٥ سم ، ٨ سم طولا ضلعين في مثلث فإن أكبر عدد صحيح يمثل طول الضلع الثالث = ...

⑤ إذا كان طولا ضلعين في مثلث متساوي الساقين هما ١٠ سم ، ٥ سم فإن طول الضلع الثالث = ... سم

⑥ إذا كان طولا ضلعين في مثلث ٧ سم ، ٤ سم فإن الفترة التي ينتمي إليها طول الضلع الثالث هي..........

(٣) اختر الإجابة الصحيحة مما بين الأقواس :

① الأعداد ٥ ، ٥ ، ٥ تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث ....
[متساوي الساقين أ، مختلف الأضلاع أ، متساوي الأضلاع أ، لا تصلح أضلاع مثلث]

② الأعداد ٥ ، ٥ ، ١٥ تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث ....
[متساوي الساقين أ، مختلف الأضلاع أ، متساوي الأضلاع أ، لا تصلح أضلاع مثلث]

③ طول أي ضلع في مثلث .... مجموع طولي الضلعين الآخرين
[< أ، > أ، = أ، ضعف]

④ مثلث به ضلعان طولهما ٧ سم ، ٥ سم يمكن أن يكون طول الضلع الثالث ..... سم
[١١ أ، ١٢ أ، ١٣ أ، ١٤]

⑤ في أي مثلث أ ب جـ نجد أن أ ب .... ب جـ - جـ أ
[< أ، > أ، = أ، ≤]

⑥ الأطوال ٢ س ، س + ٢ ، ٦ تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث إذا كانت س = ...
[صفر أ، ١ أ، ٢ أ، ٤]

⑦ مثلث له محور تماثل واحد وطولا ضلعين فيه ٣ سم ، ٦ سم فإن محيطه = ... سم
[٣ أ، ٩ أ، ١٥ أ، ١٢]



④ أي من هذه الأعداد تصلح أطوالاً لأضلاع مثلث مع ذكر السبب ؟

(أ) ٢ ، ٤ ، ٥ (ب) ٣ ، ٥ ، ٧ (جـ) ٣ ، ٨ ، ٤

(د) ٦ ، ٦ ، ٦ (هـ) ٦ ، ٧ ، ١٣ (و) ٤ ، ٦ ، ١١

(ز) ١٢ ، ٣ ، ٦ (ح) ٧ ، ١٤ ، ٧ (ط) ٥ ، ٩ ، ٥

⑤ أوجد الفترة التي ينتمي إليها طول الضلع الثالث لكل من المثلثات التالية إذا كان طولا الضلعين الآخرين هما :

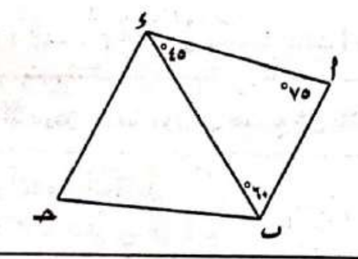
① ٦ سم ، ٩ سم ② ٥ سم ، ١٢ سم ③ ٥ سم ، ٦ سم

④ ٢ سم ، ١٠ سم ⑤ ٢,٩ سم ، ٣,٢ سم ⑥ ٤ سم ، ٤ سم

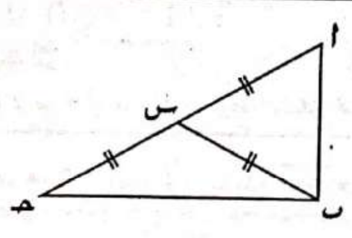
⑥ إذا كان طولا ضلعين في مثلث متساوي الساقين ٥ سم ، ١٢ سم فما هو طول الضلع الثالث ؟ أذكر السبب

مسائل المستوى الثاني

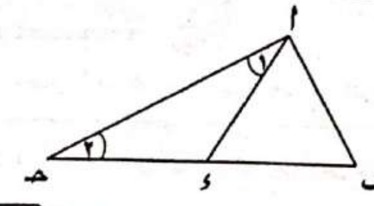
⑦ في الشكل المقابل :
أ ب جـ د شكل رباعي فيه
ق(∠ أ) = ٧٥° ،
ق(∠ أ ب د) = ٦٠° ،
ق(∠ أ د ب) = ٤٥°
أثبت أن : ب جـ + جـ د > أ د



⑧ في الشكل المقابل :
△ أ ب جـ فيه
س منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ،
ب س = أ س
أثبت أن : أ جـ > أ ب



⑨ في الشكل المقابل :
△ أ ب جـ فيه د ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$
بحيث ق(∠١) = ق(∠٢)
أثبت أن : ب جـ > أ ب



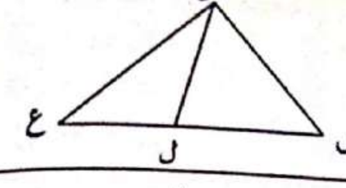


(١٠) في الشكل المقابل :

س ص ع Δ ، ل ∈ $\overline{ص ع}$

أثبت أن :

محيط Δ س ص ع > ٢ س ل



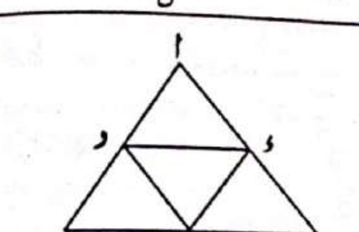
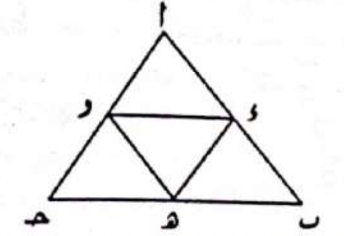
(١١) في الشكل المقابل :

ا ب جـ Δ فيه ء ∈ $\overline{ا ب}$ ،

و ∈ $\overline{ا جـ}$ ، هـ ∈ $\overline{ب جـ}$

أثبت أن :

محيط Δ ا ب جـ > محيط Δ ء هـ و

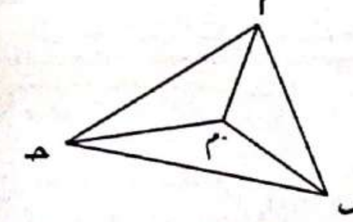
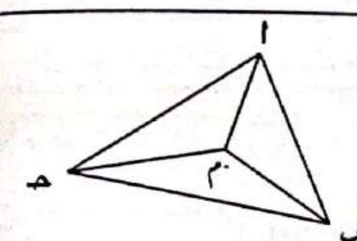



(١٢) في الشكل المقابل :

ا ب جـ مثلث ، م نقطة داخلة

أثبت أن :

م ا + م ب + م جـ > $\frac{1}{2}$ محيط المثلث ا ب جـ

(١٣) برهن أن طول أي ضلع في المثلث أصغر من نصف محيط المثلث

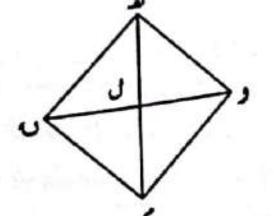
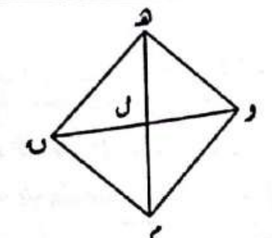
(١٤) في الشكل المقابل :

هـ و م ن شكل رباعي فيه

$\overline{و ن}$ ∩ $\overline{م هـ}$ = {ل}

أثبت أن :

٢ (و ن + م هـ) > محيط الشكل هـ و م ن

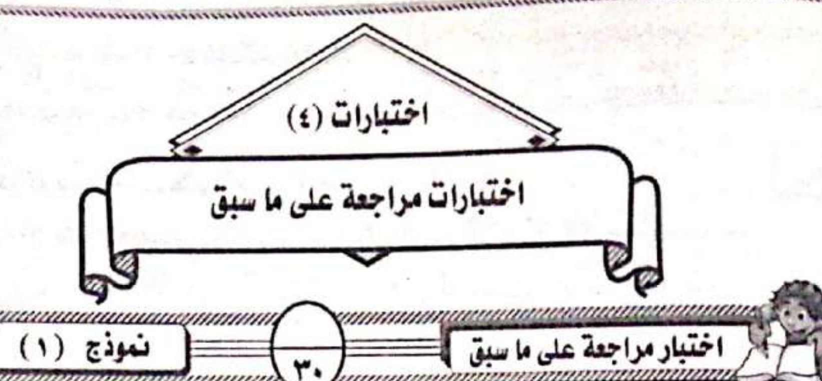



(١٥) ا ب جـ Δ ، رسم $\overleftrightarrow{ا ء}$ يقطع $\overline{ب جـ}$ في ء أثبت أن : ب ء + ء جـ + ٢ ا ء > ا ب + ا جـ



(١٦) إذا كان ا ب جـ مثلث حاد الزوايا فأثبت أن : ا جـ + ب جـ > ا ب

(١٧) أثبت أنه في أي شكل رباعي يكون محيطه > مجموع طولي قطريه



اختبار مراجعة على ما سبق | ٣٠ | نموذج (١)

(١) أكمل ما يأتي : (١٠ درجات)

① إذا اختلف طولا ضلعين في مثلث فأكبرهما في الطول تقابله ....

② محور تماثل المثلث التساوي الساقين هو المستقيم ....

③ في المثلث المتساوي الساقين إذا كان قياس إحدى زاويتي القاعدة ٥٠° فإن قياس زاوية الرأس = ...

④ ا ب جـ Δ فيه ق (∠ا) = ٥٥° ، ق (∠ب) = ٧٠° فإن عدد محاور التماثل له = ...

(٢) (ا) في الشكل المقابل : (١٠ درجات)

ا ب جـ ء شكل رباعي فيه

ق (∠ب) = ق (∠ء) = ٩٠°

ا ب = ٥ سم ، ق (∠ا جـ ب) = ٣٠°

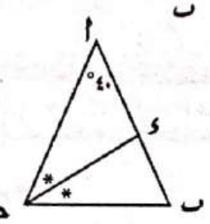
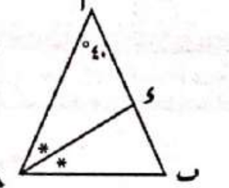
هـ منتصف $\overline{ا جـ}$ أوجد طول $\overline{ء هـ}$

(ب) في الشكل المقابل :

ا ب جـ Δ فيه ا ب = ا جـ ،

$\overrightarrow{جـ ء}$ ينصف ∠جـ

أوجد ق (∠ا ء جـ)

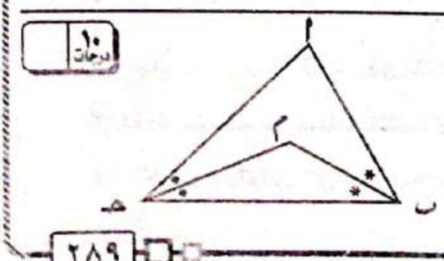



(٣) في الشكل المقابل : (١٠ درجات)

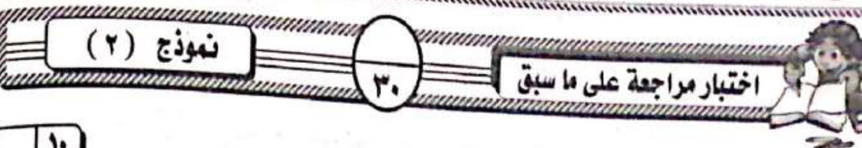
ا ب جـ مثلث ، $\overrightarrow{ب م}$ ينصف ∠ا ب جـ

$\overrightarrow{جـ م}$ ينصف ∠ا جـ ب ، م جـ > م ب

أثبت أن : ق (∠ا ب جـ) > ق (∠ا جـ ب)







١٠ درجات

١ أختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

① إذا كان قياس إحدى زوايا Δ قائم الزاوية ٤٥° كان المثلث ....

[متساوي الأضلاع أ، متساوي الساقين أ، مختلف الأضلاع أ، متطابق الزوايا]

② إذا كان Δ ا ب جـ له محور تماثل واحد فيه ق (∠ا ب جـ) = ١٢٠°

فإن ق (∠ا) = ... [٣٠° أ، ٤٠° أ، ٦٠° أ، ١٢٠°]

١٠ درجات

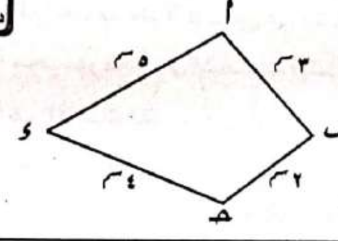
٢ في الشكل المقابل :

ا ب جـ د شكل رباعي فيه

ا ب = ٣ سم ، ب جـ = ٢ سم

جـ د = ٤ سم ، ا د = ٥ سم

أثبت أن : ق (∠ا ب جـ) > ق (∠ا د جـ)



١٠ درجات

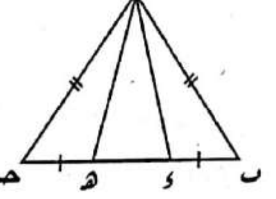
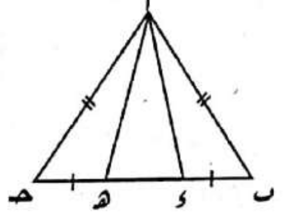
٣ في الشكل المقابل :

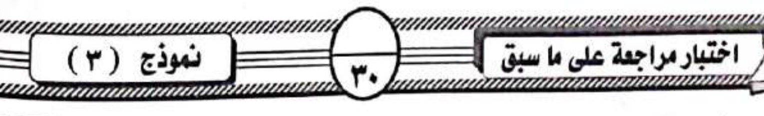
ا ب جـ مثلث فيه ا ب = ا جـ

د ∈ ب جـ ، هـ ∈ ب جـ

بحيث ب د = هـ جـ

أثبت أن : ا د = ا هـ



١٠ درجات

١ أكمل ما يأتي :

① طول متوسط Δ الخارج من رأس القائمة يساوي ....

② منصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين ....، ....

③ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كل منها من جهة القاعدة بنسبة ....

④ مجموع طولي أي ضلعين في مثلث .... طول الضلع الثالث



١٠ درجات

٢ (ا) في الشكل المقابل :

ا ب = ا جـ ،

د هـ // ا ب ،

د و // ا جـ

اثبت أن ① د هـ = د و

② ق (∠ب ا جـ) = ق (∠هـ د و)

(ب) في الشكل المقابل :

ا ب جـ Δ مثلث فيه

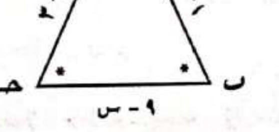
ق (∠ب) = ق (∠جـ)

أوجد محيط Δ ا ب جـ علماً بأن :

ا ب = (٢س − ١) سم ،

ب جـ = (٩ − س) سم ،

ا جـ = (س + ٣) سم



١٠ درجات

٣ (ا) في الشكل المقابل :

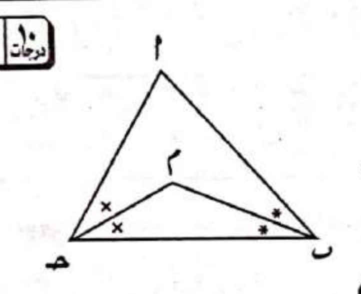
ا ب جـ مثلث ،

ب م ينصف ∠ا ب جـ ،

جـ م ينصف ∠ا جـ ب ،

فإذا كان ا ب > ا جـ

برهن أن ق (∠م جـ ب) > ق (∠م ب جـ)



(ب) في الشكل المقابل :

ا ب جـ مثلث ،

ق (∠د ب جـ) = ١٤٠° ،

ق (∠هـ جـ ب) = ١٢٠° ،

د ∈ ا ب ، هـ ∈ ا جـ

برهن أن جـ ب > ا ب

